M
MATEMATICA

ENCICLOPEDIA DE BUZUNAR

H. RADEMACHER
O. TOEPLITZ

Despre numere și figuri

H. RADEMACHER ● O. TOEPLITZ

Despre numere și figuri

Selecțiuni de matematică pentru amatori

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ● BUCUREȘTI, 1968

The enjoyment of mathematics
by
HANS RADEMACHER and OTTO TOEPLITZ
Princeton, New Jersey
© Princeton University Press
1957

TRADUCERE DE A. LASCU ŞI S. TELEMAN

COPERTA COLECŢIEI: T. MIRONESCU

Prefață la ediția engleză

Otto Toeplitz, coautor al acestei cărți, a murit în Ierusalim la 19 februarie 1940, după ce părăsise Germania în primăvara anului 1939. Toeplitz și-a început cariera la Göttingen ca elev al lui David Hilbert; a fost profesor la Kiel și apoi la Bonn. Opera sa științifică este consacrată teoriei ecuațiilor integrale și teoriei funcțiilor de o infinitate de variabile, domenii în care a adus contribuții durabile.

Planul acestei cărți este rezultatul întîlnirilor noastre frecvente pe cînd Toeplitz era la Kiel și eu la Universitatea din Hamburg. Amîndoi am vorbit în repetate rînduri despre problemele cuprinse în această carte în fața unui public larg. Manuscrisul a fost refăcut de mai multe ori după consultații și critici reciproce. Interesul deosebit al lui Toeplitz pentru istoria matematicii se simte și în lucrarea de față. Îmi amintesc cu căldură zilele din vara anului 1929 cînd împreună, la Bonn, am scris ultimele rînduri ale manuscrisului german. Sînt convins că Toeplitz ar fi fost încîntat și mîndru de versiunea engleză de față, un proiect la care se gîndise adesea.

Vreau să mulțumesc traducătorului, prof. Herbert S. Zuckerman, pentru munca sa minuțioasă și competentă. Apreciez nu numai traducerea propriu-zisă, ci și numeroasele adăugiri menite să înlesnească cititorului de limbă engleză înțelegerea textului. El a alcătuit două capitole noi (cap. 15 și cap. 28), care reflectă în mod fidel spiritul cărții.

Adresez mulțumiri prietenilor mei Emil Grosswald, D. H. Lehmer și Herbert Robbins pentru sprijinul și sfaturile lor valoroase, precum și editorului pentru colaborarea amicală.

Philadelphia, 1956

HANS RADEMACHER

Introducere

Matematica, datorită limbajului, notațiilor și simbolurilor sale, cu totul neobișnuite, pare despărțită de lumea înconjurătoare printr-un zid înalt. Ce se întîmplă dincolo de acest zid este în cea mai mare parte un secret pentru necunoscător. În imaginația sa există doar numerele cenușii, lipsite de interes și un mecanism lipsit de viață, care funcționează conform unor legi implacabile. Pe de altă parte, acest zid limitează adesea privirile celui din interior. El este preocupat de a măsura obiectele matematice cu un instrument special, și este mîndru de faptul că nici un profan nu poate pătrunde în domeniul său.

Este posibil să facem o breșă în acest zid pentru a prezenta matematica în așa fel ca spectatorul să se poată bucura de ea? Poate fi extins farmecul matematicii dincolo de cercul îngust al acelora „înzestrați din punct de vedere matematic"? Într-adevăr, puțini oameni au talent matematic în sensul de a fi capabili să descopere noi fapte matematice. La fel, numai puțini oameni sînt talentați din punct de vedere muzical în sensul de a putea să compună muzică. Cu toate acestea, mulți oameni pot înțelege și reproduce probabil muzica sau se pot bucura cel puțin de ea. Noi credem că numărul celor care pot înțelege ideile matematice simple nu este mai mic decît numărul acelora care gustă muzica, și că interesul lor va fi stimulat numai dacă putem înlătura aversiunea față de matematică pe care atît de mulți au dobîndit-o în experiența lor școlară.

Scopul lucrării de față este tocmai acela de a arăta că aversiunea față de matematică dispare de îndată ce sînt

înfățiate ideile matematice cu adevărat esențiale. Ea urmărește să prezinte diferite exemple din cuprinsul variat al matematicii, din matematica cultivată pentru ea însăși, și să arate valoarea sa intrinsecă.

S-au făcut multe încercări de a prezenta matematica nematematicienilor, dar acestea au urmărit mai mult să arate utilitatea matematicii în alte domenii ale activității umane, cu intenția de a veni în ajutorul înțelegerii și interesului cititorului. În mod frecvent au fost prezentate avantajele pe care ea le aduce în aplicațiile tehnice, ca și în alte aplicații, și aceste avantaje au fost ilustrate prin numeroase exemple. Pe de altă parte, s-au scris multe cărți despre jocurile și amuzamentele matematice. Deși aceste cărți conțin mult material interesant, ele nu reușesc să dea de multe ori decît o imagine oarecum deformată a ceea ce este în realitate matematica. În sfîrșit, alte lucrări s-au ocupat de fundamentele matematicii din punctul de vedere al valorii lor general filozofice. Cititorul rîndurilor ce urmează, care este în primul rînd interesat de matematica pură, își va îndrepta în mod firesc atenția asupra acestor evaluări epistemologice ale matematicii. Dar a judeca valoarea matematicii după criterii exterioare înseamnă a-i atribui acesteia o valoare neesențială.

În cele ce urmează nu vom putea arăta efectele ideilor matematice asupra matematicii însăși. Cu alte cuvinte, nu putem înfățișa aplicațiile matematicii în ea însăși, adică folosirea ideilor și rezultatelor dintr-un domeniu al matematicii într-altul. Aceasta înseamnă că sîntem nevoiți să omitem o parte cu totul esențială din edificiul matematicii, marea și surprinzătoarea întrepătrundere care leagă acest edificiu în toate direcțiile. Această omisiune, cu totul involuntară din partea noastră, este regretabilă deoarece cele mai mari descoperiri matematice sînt tocmai acelea care pun în evidență asemenea legături profunde. Pentru a prezenta aceste întrepătrunderi, totuși, am fi avut nevoie de o pregătire îndelungată și cuprinzătoare și, în plus, ar fi trebuit să presupunem din partea cititorului o familiaritate deosebită cu matematica. Aceasta vine în opoziție cu scopul lucrării de față.

Prezentarea noastră va cuprinde nu *fapte*, așa cum le înfățișează alte științe necunoscătorului, ci *tipuri de fenomene*, *metode de a pune probleme* și *metode de a rezolva probleme*. Într-adevăr, pentru a înțelege marile evenimente matematice, teoriile cuprinzătoare, ar fi nevoie de un studiu îndelungat și susținut. Dar, același lucru este de asemenea adevărat pentru muzică. Mergînd prima oară la un concert nu sîntem în stare să apreciem în întregime *Arta Fugii* de Bach și nici nu putem să vedem imediat structura unei simfonii. Dar, pe lîngă marile opere de muzică există și bucăți scurte care conțin ceva din sublimul muzical și care pot fi înțelese de oricine. Urmărim să selecționăm astfel de piese mici din vastul domeniu al matematicii: un șir de subiecte, fiecare de sine stătător, care să nu ceară mai mult de o oră pentru a fi citite și înțelese. Subiectele fiind independente, nu este nevoie să ne amintim ce s-a discutat înaintea fiecărui capitol. De asemenea, nu se presupune că cititorul și-ar aminti ceva din cunoștințele pe care a fost obligat să le învețe în școală. Nu se face de loc uz de logaritmi sau trigonometrie. Nu se face nici o mențiune referitoare la calculul diferențial sau integral. Teoremele despre egalitatea triunghiurilor și înmulțirea sumelor algebrice sînt treptat reamintite cititorului; aceasta este totul.

În cazul unei scurte bucăți muzicale se poate ca linia melodică de început să nu fie cea care îi dă frumusețea. O mică variație a temei, o modulație surprinzătoare poate foarte bine să reprezinte punctul culminant al întregii bucăți. Numai cel care a ascultat atent tema de bază va pătrunde în întregime și va înțelege această culme. În mod asemănător, cititorul nostru va trebui să „asculte" liniștit și atent motivul de bază al unei probleme, dezvoltarea sa ulterioară, în cele cîteva exemple preliminare care ilustrează fiecare temă, înainte de a apărea elementul hotărîtor care conduce spre ideea esențială. El va trebui să urmărească raționamentul cu o atenție sporită față de aceea acordată unei lecturi obișnuite. Astfel va putea prinde fără greutate ideile esențiale din fiecare subiect.

El va putea întrezări atunci cîte ceva din ceea ce au creat cîțiva mari gînditori care, părăsind domeniul creației lor teoretice cuprinzătoare, au alcătuit cu mijloacele cele mai elementare mici opere de artă de sine stătătoare, fragmente de prototipuri matematice.

I

Șirul numerelor prime

6 este egal cu 2 ori 3, dar 7 nu poate fi descompus în mod asemănător, ca produs de doi factori. De aceea 7 se numește număr prim. Un număr prim este un număr întreg pozitiv care nu poate fi scris ca produsul a doi factori mai mici; 5 și 3 sînt numere prime, dar 4 și 12 nu sînt prime, deoarece avem $4 = 2 \cdot 2$ și $12 = 3 \cdot 4$. Numerele care pot fi descompuse ca 4 și 12 se numesc numere compuse. Numărul 1 nu este compus dar, deoarece el se comportă cu totul diferit de celelalte numere, nu este considerat de obicei ca număr prim; prin urmare 2 este primul număr prim, iar primele numere prime sînt:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

O simplă privire arată că acest șir nu se formează după o lege ușor de găsit și, într-adevăr, structura șirului numerelor prime se dovedește a fi extrem de complicată.

Un număr poate fi descompus succesiv în factori, pînă cînd se ajunge la un produs de numere prime. Astfel $6 = 2 \cdot 3$ se exprimă imediat ca un produs de două numere prime, pe cînd $30 = 5 \cdot 6$ și $6 = 2 \cdot 3$ conduc la descompunerea $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ în produsul a trei numere prime. Analog 24 are patru factori primi ($24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$), dintre care trei se întîmplă să coincidă cu același număr prim, 2. În cazul unui număr prim ca de exemplu 5 se poate scrie numai $5 = 5$. Cu ajutorul acestei descompuneri succesive, orice număr pozitiv întreg, exceptînd pe 1, poate fi scris ca un produs de numere prime. Din această cauză, numerele prime pot fi concepute ca

niște elemente de construcție ale șirului tuturor numerelor întregi pozitive.

În cartea a IX-a din *Elementele* lui Euclid se pune problema dacă șirul numerelor prime are sfîrșit și se găsește soluția. Se arată că șirul nu are sfîrșit, că după fiecare număr prim poate fi găsit un alt număr prim mai mare.

Demonstrația lui Euclid este foarte ingenioasă, deși extrem de simplă. Numerele 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... sînt toate multipli ai lui 3. Nici un alt număr nu se mai divide exact cu 3. Numerele care se succed numerelor din șirul precedent formează șirul numerelor 4, 7, 10, 13, 16, 19, ..., care sînt multipli de 3 măriți cu 1, și care nu sînt divizibili cu 3; de exemplu, $19 = 6 \cdot 3 + 1$, $22 = 7 \cdot 3 + 1$ etc. În același mod, multiplii lui 5 măriți cu 1 nu sînt divizibili prin 5 ($21 = 4 \cdot 5 + 1$ etc.). Același lucru este adevărat pentru 7, pentru 11, și așa mai departe.

În continuare, Euclid scrie numerele

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2\,311$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 \quad \text{etc.}$$

Primele două numere prime, primele trei numere prime, și așa mai departe, sînt înmulțite la un loc și fiecare produs este mărit cu 1. Nici unul din aceste numere nu este divizibil cu vreunul dintre numerele prime cu ajutorul cărora este format. Deoarece 31 este multiplu de 2 mărit cu 1 el nu este divizibil cu 2. El este un multiplu de 3 mărit cu 1 și prin urmare nu este divizibil cu 3. El este totodată și un multiplu de 5 mărit cu 1, deci nu este divizibil nici cu 5. Numărul 31 se întîmplă să fie prim și este evident mai mare decît 5. Numerele 211 și 2 311 sînt, de asemenea, prime, dar 30 031 nu este prim. Totuși 30 031 nu este divizibil prin 2, 3, 5, 7, 11 sau 13, și prin urmare factorii săi primi sînt mai mari decît 13. De fapt, un simplu calcul arată că $30\,031 = 59 \cdot 509$, și acești factori primi sînt mai mari decît 13.

Același raționament poate fi aplicat de oricît de multe ori am dori. Fie p un număr prim, să formăm produsul tuturor numerelor prime de la 2 la p; să mărim acest produs cu 1. Obținem

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots p + 1 = N.$$

Nici unul din numerele prime 2, 3, 5 ... p nu divid pe N, prin urmare, sau N este un număr prim (cu siguranță, mult mai mare decît p), sau toți factorii primi ai lui N sînt diferiți de 2, 3, 5 ... p și, prin urmare, sînt mai mari decît p. În ambele cazuri se găsește un număr prim mai mare decît p. Oricît de mare ar fi p există totdeauna un număr prim mai mare decît el.

Această parte din *Elementele* lui Euclid este cu totul remarcabilă; ar fi însă dificil să enumerăm toate aspectele sale minunate. Problema este de interes pur teoretic. Ea poate fi pusă pentru interesul său în sine numai de o persoană care are un anumit simț lăuntric pentru gîndirea matematică. Acest simț matematic, ca și aprecierea frumuseții matematicii au fost deosebit de evidente în Grecia antică, și ele s-au transmis civilizațiilor ulterioare. Pe de altă parte, această problemă face parte din acea categorie de probleme care cu timpul sînt cu totul date uitării. Chiar cînd ni se atrage atenția asupra ei, ea pare banală și superfluă, dar dificultățile sale reale sînt cu totul ascunse. În sfîrșit, este de admirat modul simplu și ingenios în care Euclid demonstrează teorema. Modul cel mai natural de a încerca rezolvarea problemei nu este însă acela al lui Euclid. Ar fi mult mai natural să încercăm să găsim numărul prim care vine imediat după un număr prim dat. Încercări de acest fel s-au făcut, dar au eșuat întotdeauna din cauza modului extrem de neregulat în care se formează șirul numerelor prime.

Demonstrația lui Euclid evită această dificultate, provenită din lipsa unei legi de formare a șirului numerelor prime, căutînd un număr prim oarecare mai mare decît numărul prim p, în loc de a căuta numărul prim care urmează imediat lui p. De exemplu, demonstrația sa furnizează pe 2 311 și nu pe 13 ca număr prim mai mare decît 11, și ea ne dă pe 59 ca număr prim mai mare decît

13. În mod frecvent există mai multe numere prime între un număr prim considerat și numărul furnizat de demonstrația lui Euclid. Acesta nu este un semn de slăbiciune al demonstrației, ci mai curînd o dovadă de ingeniozitate a grecilor, prin faptul că ei nu încercau să facă mai mult decît era necesar.

Ca o ilustrare a complexității șirului numerelor prime vom arăta că există lacune mari în acest șir. Vom arăta, de exemplu, că putem găsi 1 000 de numere consecutive care să fie toate numere compuse. Această metodă este strîns legată de aceea a lui Euclid.

Am văzut că $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ nu este divizibil cu 2, 3 sau 5. Dacă două numere sînt divizibile prin 2 atunci suma lor este cu siguranță divizibilă cu 2. Același lucru este adevărat pentru 3, 5 etc. Pe de altă parte, $2 \cdot 3 \cdot 5$ este divizibil cu 2, 3 și 5, deci $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 32$ este divizibil cu 2, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 = 33$ este divizibil cu 3, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 34$ este divizibil cu 2, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 5 = 35$ este divizibil cu 5 și $2 \cdot 3 \cdot 5 + 6 = 36$ este divizibil cu 2. Prin urmare, nici unul dintre numerele 32, 33, 34, 35, 36 nu este prim. Acest argument încetează de a mai fi adevărat prima dată pentru numărul $2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37$ care nu este divizibil cu 2, 3 sau 5.

În același mod putem găsi 1 000 de numere compuse consecutive. Fie p primul dintre numerele prime care au patru cifre (1 009) și să formăm următoarele 1 000 de numere

$$2 \cdot 3 \ldots p + 2, \quad 2 \cdot 3 \ldots p + 3, \ldots, 2 \cdot 3 \ldots p + 1\,001.$$

Fiecare dintre numerele 2, 3, 4, 5, ..., 1 001 este divizibil cu unul dintre numerele prime 2, 3, ..., p ca și numărul $2 \cdot 3 \ldots p$. Prin urmare, fiecare dintre numerele scrise mai sus este, de asemenea, divizibil cu unul dintre numerele 2, 3, ... p și, deci, nu poate fi un număr prim. Am găsit astfel 1 000 de numere compuse consecutive și, prin urmare, există lacune de cel puțin 1 000 de numere în șirul numerelor prime.

Natural, o lacună de o asemenea lungime nu poate să apară înainte de a merge suficient de departe în șirul numerelor prime, dar dacă mergem destul de departe,

prin aceeași metodă, putem găsi lacune oricît de mari vrem.

Această problemă este strîns legată de problema considerată de Euclid, atît prin natura sa, cît și prin mijloacele de demonstrație. Cu toate acestea problema lacunelor din șirul numerelor prime nu a fost pusă de greci. Ea a fost ridicată de matematicienii moderni împreună cu un mare număr de alte probleme înrudite. Multe din ele nu sînt ușor de rezolvat; unele nu sînt rezolvate nici pînă astăzi, pe cînd altele au condus la domenii complet noi ale matematicii.

Să considerăm una dintre aceste probleme, pe care o vom ataca cu aceleași metode și care ne va da o anumită informație asupra celorlalte. Multiplii lui 3 sînt 3, 6, 9, ... și aceste numere mărite cu 1, adică 4, 7, 10, ..., au fost considerate mai sus. Numerele care rămîn 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ... sînt numerele care dau restul 2 la împărțirea cu 3. Există printre acestea o infinitate de numere prime? Cu alte cuvinte șirul 2, 5, 11, 17, 23, ... are sfîrșit? Vom demonstra că există un număr infinit de numere prime printre acestea.

Întîi vom arăta că dacă oricare două dintre numerele 1, 4, 7, 10, 13, ... sînt înmulțite între ele, produsul este din nou un număr din acest șir. Unul oarecare dintre aceste numere este un multiplu de 3 mărit cu 1, adică de forma $3x + 1$. Dacă un alt număr din acest șir este $3y + 1$, atunci produsul lor va fi

$$(1) \qquad (3x + 1)(3y + 1) = 9xy + 3y + 3x + 1 =$$

$$= 3(3xy + y + x) + 1,$$

care este, de asemenea, un multiplu de 3 mărit cu 1 și, prin urmare, face parte din șirul de numere considerate.

Acum, dacă oricare dintre numerele 2, 5, 8, 11, ... este descompus în factori primi, măcar unul dintre factorii primi trebuie să facă parte, de asemenea, dintre numerele 2, 5, 8, 11, ... De exemplu, $14 = 2 \cdot 7$ are factorul prim 2 iar $35 = 5 \cdot 7$ are factorul prim 5. Pentru a arăta că acest lucru este totdeauna adevărat, observăm că oricare dintre factorii primi trebuie să fie sau multiplu de 3, sau să facă parte din șirul 1, 4, 7, 10, ..., sau din șirul

2, 5, 8, ... Singurul multiplu de 3 care este număr prim este 3 însuși, și acesta nu divide numerele noastre. Dacă toți factorii primi ar fi de forma 1, 4, 7, 10, ..., atunci, conform observației precedente (1), rezultă că numărul nostru trebuie să aibă aceeași formă. Dar întrucît el nu este de această formă, cel puțin unul dintre factorii săi primi trebuie să fie un număr din șirul 2, 5, 8, 11, ...

Putem acum proceda ca în demonstrația lui Euclid, cu singura excepție că vom considera numărul

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots p - 1 = M$$

în loc de

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots p + 1 = N.$$

M este un multiplu de 3 micșorat cu 1, ceea ce înseamnă că face parte din șirul 2, 5, 8, 11, ... Numarul M, la fel ca și N nu este divizibil cu nici unul dintre numerele 2, 3, 5, 7, 11, ..., p. M este sau un număr prim mai mare decît p, sau toți factorii săi primi sînt mai mari decît p. În ultimul caz, cel puțin unul dintre factorii primi ai săi este unul dintre numerele 2, 5, 8, ..., și, prin urmare, în ambele cazuri se găsește un număr prim de aceeași formă, care este mai mare decît p. Astfel, șirul 2, 5, 8, ... conține o infinitate de numere prime.

Aceasta lasă deschisă problema dacă șirul numerelor 1, 4, 7, 10, 13, ... conține o infinitate de numere prime. Ar fi perfect posibil ca șirul 2, 5, 8, ... să conțină o infinitate de numere prime, iar șirul 1, 4, 7, ... să conțină numai un număr finit. În realitate, ultimul șir conține, de asemenea, o infinitate de numere prime, însă demonstrația acestui fapt necesită metode cu totul diferite. Într-un capitol ulterior vom da cîteva informații asupra acestor metode. Motivul pentru care am menționat aceste probleme a fost de a arăta în ce mod problemele și metodele matematicii moderne sînt legate de acelea ale grecilor. Acest fapt este adevărat nu numai pentru cazuri izolate, ci în întregul cuprins al matematicii moderne, în domenii de foarte mare interes, în care cercetările continuă.

II

Parcurgînd rețele de curbe

O societate de transporturi auto hotărăște să-și reorganizeze sistemul de curse fără să schimbe drumurile existente. Ea dorește să facă acest lucru în așa fel, încît fiecare porțiune de drum să fie deservită de o singură cursă. Pasagerii urmează să se transfere de la o cursă la alta pînă cînd ajung la destinație. Problema este *cît de multe curse sînt necesare pentru a parcurge toate porțiunile de drum fără ca o porțiune să fie parcursă de două curse diferite.*

Pentru un oraș foarte mic, cu drumurile de transport ca în fig. 1, problema este extrem de simplă. Un drum va merge de la A la B și altul de la C la D, amîndouă trecînd prin K. Sau o linie poate merge de la A prin K la D, și a doua de la B prin K la C. În sfîrșit, o linie poate merge de la A prin K la C, iar alta de la B prin K la D. Fiecare dintre aceste posibilități necesită două curse. Desigur, societatea de transporturi ar putea introduce un nou punct de transport în R, să sfîrșească o cursă acolo și să înceapă o cursă de navetă de la R la B. Dar aceasta ar spori numărul total de curse necesare. Prin adăugarea mai multor puncte de transfer numărul curselor poate fi mărit oricît de mult, dar nu asta ne interesează, deoarece problema este de a găsi numărul minim de curse.

Fig. 2 reprezintă încă o rețea rutieră destul de simplă, dar ceva mai complicată decît aceea din cazul precedent. O posibilitate este de a forma o cursă de la A circular prin B, C, D, E și înapoi la A (o cursă închisă). O a doua cursă ar putea să meargă de la A prin F, G, H la D. Vor mai fi necesare încă trei curse BF, EG, CH, formînd în total

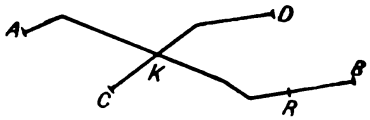


Fig. 1

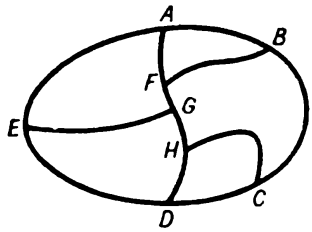


Fig. 2

cinci curse. Totuși acesta nu este cel mai bun aranjament. Primele două curse ar putea fi unite într-o singură cursă, mergînd de la A împrejur prin B, C, D, E și înapoi la A și apoi continuînd prin F, G și H la D. Acesta reduce numărul curselor la patru, dar se pune întrebarea nu este cumva posibil de a găsi numai trei curse?

În rețeaua din fig. 3 o cursă ar putea conduce de la A circular prin B, C, D, și E înapoi la A, iar apoi prin F la B. Aceasta ar lăsa trei drumuri disponibile CF, DF, EF, dintre care două pot fi unite într-o singură cursă CFD, lăsînd EF ca o cursă aparte. În acest caz, primele două curse trec prin F, pe cînd a treia sfîrșește în F. Se pune din nou problema nu cumva ajung numai două curse?

Nu ar fi o dificultate prea mare să formăm toate cursele posibile pentru fig. 2 și fig. 3 (așa cum am făcut pentru fig. 1) cu scopul de a fi siguri că găsim numărul minim de curse posibile. Totuși acesta ar fi un procedeu cam lung pentru o rețea complicată, și în orice caz nu ar fi o problemă interesantă. Totodată, procedînd în felul acesta, nu am face mai multă matematică decît facem cînd înmulțim între ele două numere cu șase cifre. Spiritul matematicii este de a căuta esențialul problemei și, cu ajutorul său, să rezolve problema.

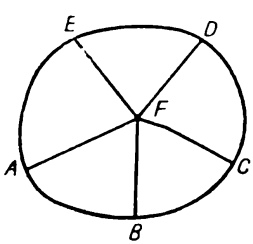


Fig. 3

Esențialul în această problemă este foarte simplu. Să vedem unde trebuie fixate capetele curselor. Trebuie să fie cîte un capăt pe fiecare porțiune care are un capăt liber, așa ca A, B, C și D din fig. 1. Deoarece în acest caz

avem nevoie de patru capete și fiindcă fiecare cursă nu are mai mult de două capete (o cursă închisă nu are capete, evident), este clar că trebuie să fie cel puțin două curse între aceste patru capete. Cu ajutorul acestei singure considerații am obținut același rezultat ca mai înainte, fără să considerăm toate cazurile posibile.

În fig. 2 nu există capete libere, dar există poziții ca A, în care sosesc trei drumuri. Într-o astfel de poziție trebuie să existe măcar un capăt de cursă, deoarece două curse diferite nu pot fi niciodată pe același drum. În fig. 2 există opt poziții de acest fel, astfel încît trebuie să fie opt capete de curse. Opt este un număr par, numărul de capete a patru curse. Prin urmare trebuie să avem măcar patru curse; așa după cum am văzut, există într-adevăr patru curse.

În fig. 3 există cinci intersecții de tipul considerat mai înainte, și un al șaselea punct F în care se încrucișează nu trei drumuri, ci cinci. Vom numi un astfel de punct o intersecție de ordinul cinci. În F drumurile pot fi unite cîte două pentru a forma curse, lăsînd o cursă aparte, după cum s-a procedat în prima discuție făcută la fig. 3. Același lucru va fi adevărat pentru orice intersecție de ordin impar; întotdeauna rămîne un drum liber, și prin urmare în acel punct trebuie să avem cel puțin un capăt. Se vede acum că fig. 3 necesită cel puțin șase capete (un număr par), și prin urmare cel puțin trei curse.

Pentru orice rețea, oricît de complicată, se poate număra cu ușurință numărul intersecțiilor de ordin impar și împărțindu-l la 2 se obține numărul minim de curse posibile. În cele trei exemple precedente numărul intersecțiilor de ordin impar a fost întotdeauna par, și s-a întîmplat ca jumătate din acest număr să constituie nu numai numărul cel puțin necesar, ci chiar numărul efectiv de curse care rezolvă problema. Vom căuta acum să determinăm dacă nu cumva numărul intersecțiilor de ordin impar este totdeauna par, și dacă jumătate din acest număr ne furnizează numărul minim necesar de curse pentru orice rețea.

Oricît de complicată ar fi rețeaua, este întotdeauna posibil să găsim un sistem de curse care să nu aibă mai

mult de o singură cursă pe fiecare drum. Pentru a realiza aceasta este suficient să stabilim pe fiecare porțiune de rețea dintre două intersecții o cursă care să facă naveta. Totuși, aceasta ar necesita un număr mult prea mare de curse. Vor exista și alte sisteme de curse cu un număr mai mic, și noi căutăm sistemul optim, cu minimum de curse necesare. Printre toate sistemele care se pot concepe există cu siguranță unul optim, astfel încît orice alt sistem să necesite cel puțin tot atîtea curse.

Este clar că un sistem de curse nu este optim dacă include și capete suplimentare în puncte de transfer ca *R* din fig. 1. De asemenea, sistemul nu poate să fie optim dacă într-un punct ca *F* din fig. 3 sfîrșește mai mult de o cursă, pentru că dacă o cursă vine prin *C* la *F*, iar alta prin *D* la *F*, ele pot fi unite în *F* într-o singură cursă, și aceasta ar micșora numărul total. Pentru a obține un sistem optim, drumurile de la fiecare intersecție pot fi împerecheate două cîte două în curse. Aceasta înseamnă că numai o singură cursă trebuie să aibă capătul într-o intersecție de ordin impar, și nici o cursă nu trebuie să aibă capăt într-o intersecție de ordin par, iar numărul total de capete de curse va fi egal cu numărul intersecțiilor de ordin impar din rețea.

Să stabilim acum dacă un sistem optim poate să conțină o cursă închisă. O astfel de cursă închisă a fost considerată în discuția noastră despre fig. 2, dar noi am unit-o în *A* cu cursa *AFGHD*, scăzînd numărul curselor de la cinci la patru. Cursa obținută *ABCDAFGHD* nu mai este închisă, ea are capetele *A* și *D*. O asemenea reducere poate fi operată ori de cîte ori o cursă închisă conține un punct de intersecție de ordin impar și o reducere asemănătoare poate fi realizată și cînd cursa închisă conține numai puncte de intersecție de ordin par. Fie *A* o astfel de intersecție (fig. 4) pe o rută închisă (ilustrată aci sub forma unui opt). Încă două rute prin *A* sînt indicate prin curbe punctate și

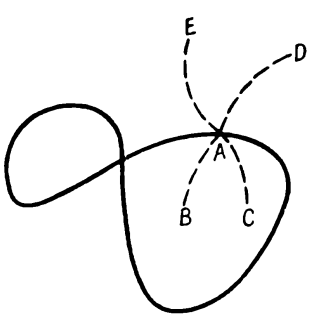


Fig. 4

ele pot să continue în orice mod. Dacă sistemul este optim, nici o cursă nu poate să aibă capătul în A, astfel linia de la B prin A continuă, să spunem, spre E. În acest caz, putem combina această linie și cursa închisă într-o singură cursă mergînd de la B prin A parcurgînd apoi cursa închisă înapoi la A și continuînd apoi spre E. Deoarece aceasta reduce numărul de curse, sistemul inițial de curse nu ar fi putut să fie optim. Totuși, trebuie să observăm că în această reducere cursa nou formată poate să fie închisă, deoarece linia BAE poate fi continuată în așa fel, încît să se întoarcă în B. Dacă acesta este cazul, nu mai este posibilă nici o reducere ulterioară. Dacă noua cursă închisă conține un punct de intersecție de ordin impar, atunci reducerea următoare nu va conduce la o cursă deschisă. Altfel toate punctele de intersecție ale rețelei inițiale ar trebui să fie de ordin par și sistemul se va reduce în cele din urmă la o singură cursă închisă.

Pentru a strînge laolaltă considerațiile de mai sus vedem că dacă un sistem este optim, drumurile sfîrșesc numai în punctele de intersecție de ordin impar și numai o singură cursă sfîrșește într-un asemenea punct. De asemenea, va exista o cursă închisă în sistem numai dacă toate punctele de intersecție din rețeaua inițială sînt de ordin par și atunci cursa închisă respectivă va străbate întreaga rețea. Într-un sistem optim numărul intersecțiilor de ordin impar este egal cu numărul capetelor de curse și, prin urmare, este un număr par. Mai departe, numărul minim de curse este jumătate din numărul intersecțiilor de ordin impar, în afară de cazul în care toate intersecțiile sînt de ordin par, cînd numărul minim de curse este unu (o cursă închisă).

III

Cîteva probleme de maxim

1. Să comparăm suprafețele diferitelor dreptunghiuri care au perimetrul de doi centimetri. Unele sînt arătate în fig. 5. Lățimea fiecărui dreptunghi trebuie să fie inferioară unui centimetru, și cu cît ea este mai apropiată de 1 cm, cu atît mai mică este înălțimea și, prin urmare, suprafața dreptunghiului. Dacă înălțimea este apropiată de 1 cm, atunci lățimea și, prin urmare, aria sînt foarte mici. Dreptunghiurile intermediare au arii mai mari și se poate pune întrebarea care dintre dreptunghiuri are aria cea mai mare. Aceasta este o problemă de maxim. Ea este probabil cea mai simplă și cea mai veche dintre problemele de acest fel, și de aceea poate este cea mai potrivită pentru a fi luată în considerație ca o introducere.

Această problemă este rezolvată de Euclid, în cartea a VI-a, teorema 27. Demonstrația noastră se întemeiază pe aceleași principii și diferă numai ca prezentare de aceea a lui Euclid. Dreptunghiul $ABCD$ din fig. 6 este presupus a fi un dreptunghi cu un perimetru fix P. Pătratul $BEFG$

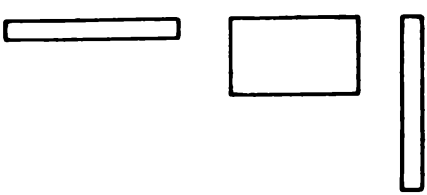


Fig. 5

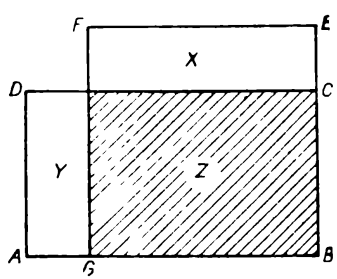


Fig. 6

Fig. 7

are fiecare latură de lungime $\frac{1}{4}$ P și, prin urmare, perimetrul este, de asemenea, P. Afirmăm că pătratul este soluția problemei noastre, adică suprafața sa este mai mare decît suprafața oricărui dreptunghi (nepătrat) $ABCD$ cu același perimetru. În figură, dreptunghiul haşurat Z este o parte atît din dreptunghiul inițial, cît și din pătrat. Pătratul mai conține și aria X, pe cînd dreptunghiul inițial este format din Z și Y. Însă $AB + BC$ este jumătate din perimetrul dreptunghiului și $GB + BE$ este jumătate din perimetrul pătratului, astfel încît acestea două sînt egale: $AB + BC = GB + BE$. Acestea pot fi scrise astfel: $AG + GB + BC = GB + BC + CE$, de unde deducem $AG = CE$. Prin urmare, dreptunghiul X este la fel de înalt pe cît este Y de lat. Totuși lățimea lui X este o latură a pătratului, pe cînd înălțimea lui Y este o *parte* din latura pătratului și, prin urmare, este mai mică. Dacă două dreptunghiuri (fig. 7) au aceeași lungime într-o dimensiune, atunci dreptunghiul care are cealaltă dimensiune mai mare are și aria mai mare, adică X este mai mare decît Y. Prin urmare, $X + Z$ este mai mare decît $Y + Z$ și pătratul are o suprafață mai mare decît dreptunghiul. Înălțimea lui Y nu este o parte din latura pătratului numai în cazul în care $ABCD$ este un pătrat, cînd pătratul $BEFG$ coincide cu dreptunghiul inițial $ABCD$. Așadar, *pătratul este mai mare decît toate dreptunghiurile cu același perimetru.*

Acest rezultat a fost demonstrat așa cum ar fi procedat și grecii. El poate, de asemenea, să fie descris printr-o formulă algebrică, cum se procedează în matematica modernă. Fie x și y dimensiunile dreptunghiului în centimetri. Suprafața dreptunghiului este dată atunci în centimetri pătrați, iar perimetrul său este $x + y + x + y = 2(x+y)$. Prin urmare, pătratul are laturile de lungime $\frac{1}{2}$ $(x + y)$

și aria $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Astfel, *dacă x și y sînt două numere pozitive arbitrare*, rezultatul precedent devine [1]

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

sau

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

În cuvinte, aceasta se poate exprima astfel: *media geometrică a două numere este întotdeauna mai mică decît media lor aritmetică.* Cele două medii sînt egale numai dacă x și y sînt egale.

2. Am văzut ce se înțelege printr-o problemă de maxim și ce înseamnă soluția sa. Întîi se propune o soluție și după aceea se dovedește că figura considerată în această soluție depășește toate celelalte figuri cu care trebuie comparată relativ la o proprietate dată (în cazul de față aria). Să considerăm problema principală a acestui capitol: *să se găsească triunghiul de suprafață maximă înscris într-un cerc dat.* Probabil că această problemă a fost tratată, dacă nu chiar rezolvată, pe vremea lui Platon, cu un secol înaintea lui Euclid. Totuși, nici Euclid și nici multe dintre cărțile moderne nu dau soluția de mai jos, care ar fi putut fi cu ușurință înțeleasă și descoperită de greci.

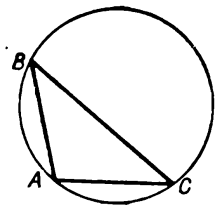
Pe lîngă triunghiul inițial ABC, considerăm triunghiul echilateral $A_0B_0C_0$ înscris în același cerc sau într-un alt cerc egal (fig. 8). Suprafața lui $A_0B_0C_0$ este complet determinată, întrucît triunghiul echilateral este determinat abstracție făcînd de o rotație. Pretindem că triunghiul echilateral este soluția problemei noastre, adică aria sa este mai mare decît aria oricărui alt triunghi înscris.

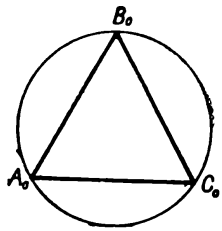
Observăm întîi că circumferința cercului nostru este împărțită în trei arce egale de triunghiul echilateral, pe cînd celelalte triunghiuri o împart în trei arce inegale. Dintre acestea cel puțin unul trebuie să fie mai mare decît o treime din circumferința totală a cercului, altfel

---

[1] Simbolul $<$ înseamnă și se citește „mai mic decît"; $\leqslant$ înseamnă „mai mic sau egal cu". Astfel $3 < 5$, $3 \leqslant 5$, $3 \leqslant 3$. În mod asemănător simbolul $>$ înseamnă „mai mare decît", iar $\geqslant$ înseamnă „mai mare sau egal cu".

Fig. 8





cele trei arce ar avea fiecare o treime din circumferință pentru a alcătui împreună un cerc întreg. Triunghiul ABC ar fi atunci echilateral, dar noi am presupus contrarul. În mod analog, unul dintre arce este mai mic decît o treime de circumferință. Al treilea arc poate să fie mai mare sau mai mic ca o treime din circumferință; nu putem face nici o precizare în această privință, dar acest lucru nu afectează demonstrația.

Să presupunem că triunghiul a fost notat în așa fel, încît arcul AB este mai mic decît o treime din circumferință, iar arcul BC mai mare. Ca și în fig. 9, vom măsura un arc CB'' de lungime egală cu AB pe arcul CB. Triunghiul CAB'' este obținut prin reflectarea triunghiului ACB față de diametrul cercului, perpendicular pe AC. Măsurăm, de asemenea, arcul AB', care este egal cu o treime din circumferință, în același sens, dinspre A spre B. Deoarece AB este mai mic decît o treime din circumferință, B' va fi situat dincolo de B. Totuși, B' nu va fi așezat dincolo de B'', adică el va fi situat între B și B''. Dacă el ar depăși pe B'', atunci arcul AB' ar fi mai mare decît AB'', obținut prin reflectare din CB. Dar CB este mai mare decît o treime din circumferință, pe cînd AB' este egal exact cu o treime din circumferință.

Deoarece B' se află între B și B'', este așezat mai sus decît B. Triunghiurile ACB și ACB' au aceeași bază AC, și înălțimea lui ACB este mai mică decît înălțimea lui ACB'. Deoarece aria triunghiului este jumătate din produsul bazei cu înălțimea, ACB are suprafața mai mică decît ACB'. Am găsit un nou triunghi ACB' înscris în cerc, de arie mai mare decît a triunghiului inițial ABC și cu o latură AB' egală cu latura triunghiului echilateral înscris.

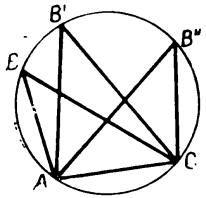


Fig. 9

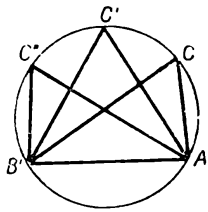


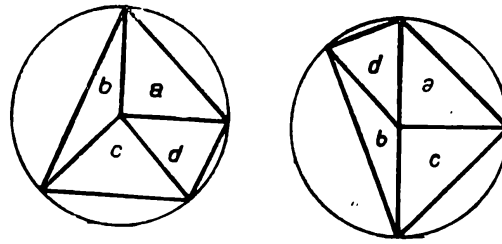
Fig. 10

Se poate întîmpla ca ACB' să fie un triunghi echilateral. Aceasta are loc în cazul cînd arcul AC ar fi exact o treime din circumferință. Atunci demonstrația faptului că triunghiul echilateral are suprafața mai mare decît triunghiul inițial este terminată. Dacă ACB' nu este echilateral, considerăm AB' ca bază a figurii, așa cum a fost AC mai înainte. Pentru a face acest lucru, rotim figura ca în fig. 10, pînă cînd AB' este situat orizontal în partea de jos a cercului. Putem acum trata pe $AB'C$, cu baza AB', așa cum am făcut cu ACB față de baza AC. Vom obține un triunghi $AB'C'$, care este echilateral, deoarece atît $B'C'$ cît și AB' sînt, fiecare, cîte o treime din circumferință. Deoarece $A_0B_0C_0$ din fig. 8 și $AB'C'$ sînt triunghiuri echilaterale înscrise în cerc, suprafețele lor sînt egale. Am arătat astfel că aria lui $AB'C'$ este mai mare decît aceea a lui $AB'C$, care, la rîndul său, este mai mare decît aria triunghiului inițial ABC, presupunînd că ABC nu este echilateral. Aceasta încheie demonstrația; triunghiul echilateral are suprafața mai mare decît orice alt triunghi înscris în același cerc.

3. Rezultatul precedent este un caz particular al unei afirmații mult mai generale care poate fi dovedită într-un mod asemănător. Vom arăta că *dintre toate poligoanele cu n laturi înscrise într-un cerc dat, poligonul regulat are suprafața mai mare.* Dacă $n = 3$, poligonul este un triunghi și obținem astfel rezultatul de mai sus.

Pentru a demonstra aceasta, trebuie să mai observăm doar un simplu fapt. Dacă ni se dă un poligon înscris în cerc (fig. 11), putem înscrie un alt poligon în cerc, cu aceleași laturi, dar într-o altă ordine. Tot ceea ce trebuie să facem pentru aceasta este să ducem razele din vîrful poligonului și să împărțim cercul în sectoare de-a lungul

Fig. 11



acestor raze. Aceste sectoare pot fi rearanjate în orice ordine am dori. Este evident că noul poligon are aceeași arie ca și cel inițial.

Demonstrația se face ca și în cazul precedent. În primul rînd, dacă poligonul nu este regulat, el are o latură care subîntinde un arc mai mic decît a n-a parte din circumferință, și o altă latură care subîntinde un arc mai mare decît a n-a parte din circumferință. În cazul unui triunghi, oricare două laturi sînt învecinate, dar dacă n este mai mare decît 3, cele două laturi care ne interesează pot să nu fie alăturate. Totuși, am văzut că putem forma un nou poligon în același cerc, cu aceleași laturi și aceeași arie, dar avînd două laturi date alături. Să presupunem că latura cea mai mică este AB, iar cea mai mare BC. Putem măsură pe cerc un arc de lungime egală cu a n-a parte din circumferință, de la A în direcția lui B și fie B' capătul său. Ca și mai înainte, B' se află între B și imaginea sa B''. Astfel, noul poligon, în care B' este înlocuit cu B și toate celelalte vîrfuri sînt neschimbate, are o suprafață mai mare decît poligonul inițial. De asemenea, o latură AB' din noul poligon este de lungime egală cu latura poligonului regulat. Putem aplica același procedeu pentru restul de n-1 laturi, rearanjînd de fiecare dată ordinea laturilor, dacă este nevoie. Continuînd pas cu pas, vom ajunge în cele din urmă la un poligon regulat, deoarece de fiecare dată apare o nouă latură cu lungimea cerută. Întrucît ariile se măresc de fiecare dată, poligonul regulat are o arie mai mare decît aceea a poligonului inițial.

În mod asemănător se poate arăta că dintre toate poligoanele cu n laturi circumscrise unui cerc poligonul regulat are suprafața cea mai mică.

IV

Segmente incomensurabile și numere iraționale

Măsurarea lungimilor, ariilor și volumelor se află la originea întregii geometrii. Pentru a măsura un segment de dreaptă prin altul, căutăm de cîte ori unul este cuprins în celălalt. Acest lucru este foarte simplu dacă poate fi realizat fără să rămînă nici un rest. Dacă segmentul mai mic nu se cuprinde în celălalt de un număr exact de ori, atunci considerăm restul. Se poate întîmpla ca restul să fie o jumătate, o treime, un sfert sau o altă fracțiune de acest fel din segmentul cu care am măsurat. Dacă este așa, avem un fel de substitut de măsură, o fracțiune de segment care să se cuprindă exact în cele două segmente de măsurat și care este folosită ca măsură. Acest nou segment este o măsură comună pentru cele două segmente inițiale.

Cele mai vechi probleme de geometrie cuprind, fără îndoială, o măsură comună. De exemplu, dacă un dreptunghi are laturile de lungime 3 și 4 atunci din teorema lui Pitagora rezultă că pătratul construit pe diagonală are suprafața

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

și diagonala este, prin urmare, de lungime 5. Deoarece latura mai mică a dreptunghiului și diagonala au segmentul 1 ca măsură comună, ele se află în raportul 3 : 5.

Este cu totul natural să încercăm să facem același lucru pentru un pătrat și să căutăm o măsură comună pentru latură și diagonală. Dacă facem această încercare vom găsi un rest (fig. 12) și sîntem obligați să încercăm o fracție mai mică din segment. Se pune problema dacă poate fi

găsită o măsură comună sau dacă nu există nici o măsură de acest fel, cu alte cuvinte dacă două segmente sînt *comensurabile* sau *incomensurabile.* Aceasta conduce la problema dacă un segment poate fi împărțit în diviziuni oricît de mici sau dacă există o limită a acestor diviziuni. Este oare un segment format dintr-un număr foarte mare de părți mici indivizibile? Are un segment o structură atomică? Concepția structurii atomice a materiei este atribuită lui Democrit, care a trăit exact înainte de Platon. Totuși există o diferență între aceasta și structura atomică a dreptei. Putem considera cu ușurință că o dreaptă este „continuă" adică poate fi subîmpărțită oricît de mult și totuși se poate presupune că materia fizică este concentrată de-a lungul ei într-o serie de atomi. S-a păstrat un fragment atribuit lui Anaxagoras aproximativ din aceeași perioadă; el afirmă într-adevăr că dreapta este continuă. Faptul că s-a păstrat numai acest fragment nu înseamnă că această afirmație a fost întîmplătoare. Mai curînd ea a reprezentat o teză controversată, care a condus la multe discuții și care este reprezentativă pentru perioada în care omenirea făcea pași reali către clarificarea problemelor de fundamente.

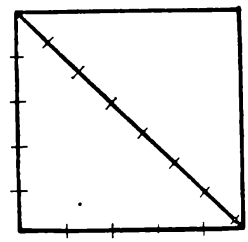


Fig. 12

Ne putem imagina efectul înspăimîntător al descoperirii neașteptate că *latura și diagonala pătratului sînt incomensurabile.* Descoperirea este atribuită școlii lui Pitagora, societate secretă din Italia de sud, despre care se știu foarte puține lucruri precise. Potrivit legendei, cel care a făcut cunoscute publicului aceste investigații a pierit într-un naufragiu. Aceasta este mai degrabă o alegorie decît un adevăr, deoarece ea s-ar putea referi la efectul înspăimîntător pe care l-a avut descoperirea numerelor iraționale asupra gîndirii contemporane despre fundamente. În orice caz, avem mărturia lui Platon însuși, în opera sa *Legile*, despre modul în care l-a impresionat această descoperire cînd a citit-o pentru prima dată.

Vom da acestui fapt două demonstrații, fără să considerăm problema, de interes istoric, de a stabili care este mai veche. A doua a fost dată nu numai de Euclid, dar

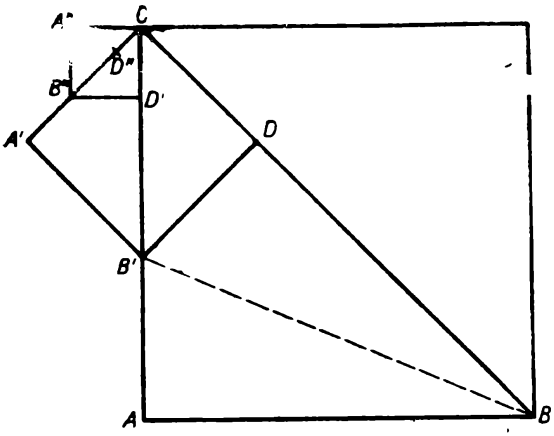


Fig. 13

chiar de Aristotel. Prima, aparent mai veche, este în spiritul metodelo grecești și, în esență, aparține cărții a X-a a lui Euclid.

În ceea ce privește prima demonstrație, trebuie să începem prin a observa anumite fapte de natură geometrică elementară. Demonstrația se obține, după cum se vede ușor, din efortul neîncununat de succes de a găsi o măsură comună pentru latură și diagonală. Vom măsura latura de-a lungul diagonalei pornind din B (fig. 13). Ea se cuprinde o singură dată și vom nota cu D capătul său. Linia $B'D$ a fost trasată perpendicular pe BD și B' este punctul în care ea intersectează latura AC. S-au unit apoi B și B'. Avem $BA = BD$, $BB' = BB'$, $\widehat{BAB'} = \widehat{BDB'}$, ultima egalitate fiind adevărată deoarece fiecare este un unghi drept. Prin urmare, datorită unei teoreme de egalitate a triunghiurilor, triunghiurile BAB' și BDB' sînt egale și, deci, $AB' = DB'$ ca laturi ce se opun la unghiuri egale. Unghiul $B'CB$ dintre o latură a pătratului și diagonală este jumătate dintr-un unghi drept și, deoarece unghiul CDB' a fost drept prin construcție, rezultă că al treilea unghi al triunghiului CDB' este egal cu jumătate dintr-un unghi drept. Prin urmare, CDB' este un triunghi dreptunghic isoscel și laturile sale DB' și DC sînt egale. Combinînd ceea ce am demonstrat, avem

$$AB' = B'D = DC. \tag{1}$$

Ridicăm acum o perpendiculară $A'C$ pe diagonală în C pe care o luăm egală cu DB'. Dacă unim A' cu B', $A'B'CD$ formează un nou pătrat, mai mic decît cel inițial. Întregul proces poate fi acum aplicat noului pătrat, măsurînd latura sa pe diagonala $B'C$ de la B' la D' și trasînd linia $B''D'$ perpendicular pe $B'C$. Ca și mai sus, avem

$$A'B'' = B''D' = D'C. \tag{2}$$

Este clar că acest procedeu poate fi repetat mereu și, de fiecare dată, se va găsi un rest de diagonală care poate fi considerat drept latură pentru pătratul următor. Deși procesul nu se oprește niciodată, resturile (care nu sînt niciodată nule) devin din ce în ce mai mici

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \ldots\ldots \tag{3}$$

Fiecare dintre aceste resturi este diferența dintre diagonală și latura pătratului corespunzător:

$$CD = CB - AB,\ CD' = CB' - A'B',\ CD'' = CB'' - A''B'', \ldots\ldots \tag{4}$$

Aceasta completează preliminariile geometrice necesare primei demonstrații. Demonstrația însăși va fi dată în mod indirect. Presupunem că latura și diagonala sînt comensurabile și arătăm că aceasta conduce la o absurditate. Dacă ele ar fi comensurabile, ar avea o măsură comună, un segment E, care se cuprinde de un număr exact de ori atît în latură, cît și în diagonală. Or, dacă două segmente sînt multipli întregi de E, atunci diferența lor este, de asemenea, un multiplu întreg de E. Prin urmare, dacă CB și AB sînt multipli întregi de E, atunci la fel este și CD, în conformitate cu (4). De asemenea, după (1) avem $CB' = CA - B'A = AB - CD$, care este o diferență de multipli de E și, prin urmare, este un multiplu întreg de E. Al doilea pătrat din fig. 13 are latura $A'B' = CD$ și diagonala CB', amîndouă multipli de E. De la primul pătrat am trecut la al doilea și putem merge mai departe; de la $A'B'$ și CB' putem găsi că CD', $A''B''$ și CB'' sînt multipli de E și așa mai departe, la pătratele următoare.

Ajungem la o contradicție. Dacă CB și AB sînt multipli întregi de E, atunci am văzut că CD', CD'', CD''',... sînt,

de asemenea, multipli de E. Dar (3) arată că acești multipli de E devin din ce în ce mai mici, deși ei sînt nenuli. Acest fapt nu este posibil, deoarece, de exemplu, dacă CD ar fi 1 000 E, atunci CD', un multiplu de E mai mic decît CD, ar fi cel mult 999 E, și așa mai departe pînă la al o mie unulea termen care ar fi mai mic decît E. Prin urmare, acesta ar fi 0, deoarece este un multiplu de E inferior lui E. Contrazicem astfel faptul că nici un termen din (3) nu este nul.

A doua demonstrație este mult mai simplă și necesită o pregătire aritmetică mai scurtă decît preliminariile geometrice ale primei demonstrații.

Să considerăm mai întîi numerele pare și impare. Un număr par este dublul altuia, astfel încît el poate fi scris $2x$. Un număr impar este un număr par mărit cu 1 și poate fi scris sub forma $2x + 1$. Pătratul unui număr impar este totdeauna impar, deoarece

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 2(2x^2 + 2x) + 1$$

este din nou un număr par mărit cu 1. De aici demonstrăm imediat:

L e m a * 1. *Dacă pătratul unui număr este par, atunci numărul însuși este par.*

Dacă numărul ar fi impar, după cum am văzut mai sus, pătratul său ar fi de asemenea impar. Este și mai ușor să demonstrăm:

L e m a 2. *Pătratul unui număr par este totdeauna divizibil cu* 4. Astfel, $(2x)^2 = 4x^2$ este de 4 ori x^2 sau simplu $4g$.

Demonstrația propriu-zisă se face din nou prin reducere la absurd. Presupunem că latura și diagonala pătratului au o măsură comună E. Fie diagonala de d ori segmentul E, iar latura de s ori segmentul E. Aplicînd teorema lui Pitagora unuia dintre triunghiurile dreptunghice formate de două laturi ale pătratului și diagonală, obținem

$$d^2 = s^2 + s^2, \quad d^2 = 2s^2. \tag{5}$$

Putem presupune că d și s n-au factori comuni, deoarece aceștia pot fi întotdeauna simplificați printr-o nouă ale-

* O lemă este o propoziție care nu este suficient de importantă pentru a fi denumită teoremă, dar care este utilizată într-o demonstrație ulterioară.

gere al lui E. De exemplu, 10 și 16 au factorul comun 2, dar ele pot fi simplificate la 5 și 8 dublînd lungimea măsurii comune E. De acum încolo vom presupune că o astfel de simplificare a fost făcută.

Din (5) vedem că d este dublul unui număr și, prin urmare, este par. Lema 1 dovedește în acest caz că d este de asemenea par. Prin urmare, s trebuie să fie impar, deoarece altfel d și s ar avea factorul comun 2 contrar ipotezei de simplificare. Totuși, deoarece d este par, conform lemei 2 d^2 este divizibil cu 4, $d^2 = 4g$ și $2s^2 = 4g$ sau $s^2 = 2g$. Prin urmare, s^2 este par și deci și s este par (aplicînd lema 1). Aceasta contrazice faptul pe care l-am dovedit că s este impar și, prin urmare, arată că ipoteza inițială după care s și d au măsură comună este falsă.

Esența acestor două demonstrații este că un șir descrescător de numere întregi pozitive are un număr finit de termeni. În prima demonstrație acest lucru este evident din discuția asupra șirului (3). În a doua demonstrație acest fapt este ascuns, dar în realitate el este cuprins în observațiile privind reducerea numerelor d și s. Demonstrația faptului că poate fi găsită o formă redusă a două numere depinde de o serie de pași descrescători.

În notația matematică obișnuită, formula (5) se scrie

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 = 2.$$

În mod similar rezultatul nostru final s-ar scrie: Nu există nici o fracție (nici un număr rațional) $x = \frac{d}{s}$ al cărui pătrat să fie 2. Aceasta se poate exprima și astfel: Nu există nici un număr rațional care să fie egal cu $\sqrt{2}$ sau, în sfîrșit, $\sqrt{2}$ este un „număr irațional".

V

O proprietate de minim

Vom considera din nou o problemă de tipul celor din cap. III, pentru care însă este mai îndreptățită denumirea de problemă de minim. Ea va servi pentru a introduce metodele matematicii superioare într-un mod clar și mai simplu. Teorema și demonstrația pe care le vom da se datoresc lui H. A. Schwarz. Deși teorema privește o problemă matematică relativ minoră, ea ilustrează modul de a gândi al acestui matematician genial chiar și într-o chestiune relativ banală.

Înainte de a considera teorema noastră principală, să ne oprim asupra unei probleme simple, relativă la reflexia luminii. Se știe foarte bine că dacă o rază de lumină pornește din A (fig. 14) și atinge o oglindă g, ea se reflectă spre B în așa fel, încît unghiul de incidență și unghiul de reflexie sînt egale. Ceea ce dorim să demonstrăm este că drumul ADB pe care raza de lumină îl străbate este cel mai scurt posibil dintre drumurile care merg de la A la B atingînd oglinda g. Este drumul pe care o navă l-ar alege dacă i s-ar cere să meargă dintr-o poziție A într-o altă poziție B și totodată să atingă un mal g în treacăt. Nu ne vom pune problema de ce o rază de lumină, care este incapabilă să judece, alege același drum pe care l-ar alege pilotul unei nave după o matură gîndire. Ceea ce vom demonstra este faptul pur matematic că *drumul ADB, avînd unghiul de incidență egal cu unghiul de reflexie, este mai scurt decît orice alt drum ACB.*

Demonstrația depinde de un truc care pare artificial din punct de vedere matematic, dar care este cu totul

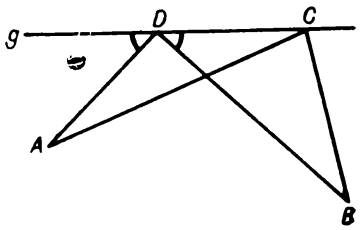


Fig. 14

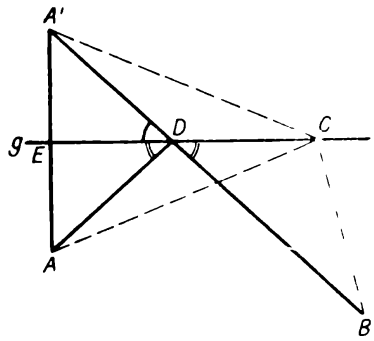


Fig. 15

natural din punct de vedere optic. Reflectăm punctul A și liniile AC și AD în oglinda g (fig. 15). Dacă A' este imaginea lui A, atunci $A'C$ este imaginea lui AC și $A'D$ este imaginea lui AD, astfel încît $A'C = AC$, $A'D = AD$, $A'E = AE$. Prin urmare, triunghiurile EDA și EDA' sînt egale și unghiurile EDA și EDA' sînt egale. Conform ipotezei noastre avem $\widehat{EDA} = \widehat{CDB}$. Deci unghiurile CDB și EDA' sînt opuse la vîrf, adică $A'DB$ este o linie dreaptă.

Lungimile drumurilor ADB și $A'DB$, ca și ACB și $A'CB$ sînt deci egale. Deoarece $A'DB$ este o linie dreaptă care unește pe A' cu B, ea este mai scurtă decît drumul $A'CB$, și, prin urmare, drumul ADB este mai scurt decît drumul ACB. Am folosit aici faptul că o linie dreaptă este distanța cea mai scurtă dintre două puncte.

2. Să revenim la problema noastră principală de a *înscrie într-un triunghi ascuțit-unghi ABC un triunghi UVW, al cărui perimetru să fie cît mai mic posibil* (fig. 16). *Afirmația este că triunghiul EFG* (fig. 17), *ale cărui vîrfuri sînt*

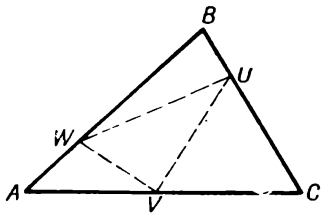


Fig. 16

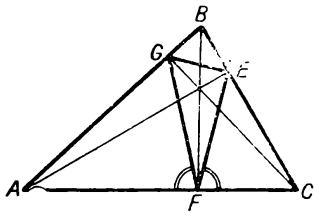


Fig. 17

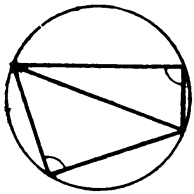


Fig. 18

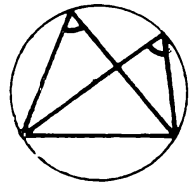


Fig. 19

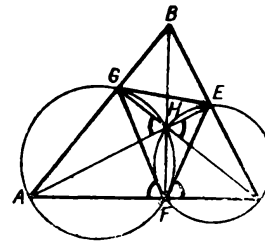


Fig. 20

cele trei picioare ale înălțimilor triunghiului ABC, are un perimetru mai mic decît orice alt triunghi înscris UVW.

Trebuie mai întîi să dovedim o lemă relativă la triunghiul *EFG*. Afirmăm că unghiurile *AFG* și *CFE* sînt egale (ca în legea reflexiei) și, prin urmare, unghiurile analoge din *E* sînt egale și de asemenea cele din *G*. Pentru a demonstra această lemă, reamintim cîteva teoreme de geometrie plană: teorema lui Tales, faptul că un unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept (fig. 18) și faptul că înălțimile unui triunghi sînt concurente. Folosind aceste fapte vedem că cercul cu diametrul *AH* trece prin *G* și *F* și că cercul cu diametrul *CH* trece prin *E* și *F* (fig. 20). Apoi unghiul *AFG* intersectează arcul *AG*, ca și unghiul *AHG*. Așadar, aceste două unghiuri sînt egale. În același mod și unghiurile *CFE* și *CHE* sînt egale. Dar unghiurile *AHG* și *CHE* sînt opuse la vîrf și, prin urmare, egale. Deci avem $\widehat{AFG} = \widehat{CFE}$.

3. Putem acum să începem demonstrația lui Schwarz. Reflectăm triunghiul *ABC* față de latura *BC* (fig. 21), reflectăm apoi triunghiul obținut față de latura sa *CA'*, reflectăm din nou triunghiul rezultat față de *A'B'*, reflectăm apoi față de *B'C'*, *C'A''* și *A''B''* în total șase reflexii. Demonstrăm mai întîi faptul, aproape evident, că poziția finală *A''B''C''* coincide cu poziția inițială *ABC*, deplasată paralel cu ea însăși, fără rotație. Primele două reflexii mută *ABC* în a treia poziție *A'B'C*. Această deplasare ar fi putut să fie făcută fără reflexii și fără a scoate triunghiul din planul său numai printr-o rotație în sensul acelor unui ceasornic în jurul lui *C* de unghi $2C$. În mod asemănător, deplasarea de la a treia la a cincea

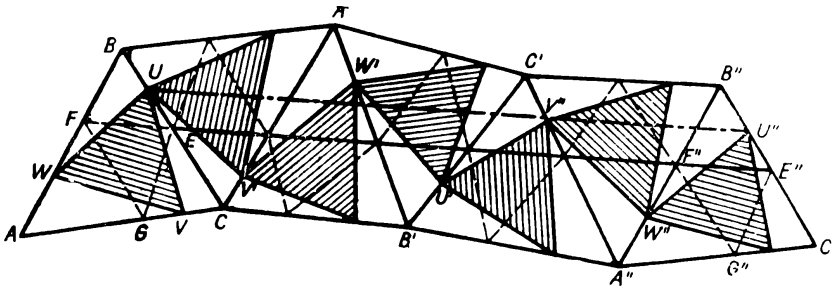


Fig. 21

poziție ar fi putut fi realizată printr-o rotație, în sensul acelor unui ceasornic, de unghi $2B$ în jurul lui B. În sfîrșit, o rotație în sensul acelor unui ceasornic de unghi $2A$ în jurul lui A'' ne-ar conduce la ultima poziție, a șaptea. În total triunghiul a fost rotit o singură dată complet, de unghi $2C + 2B + 2A$ egal cu 360°, deoarece suma $A + B + C$ a unghiurilor unui triunghi este un unghi de 180°. În poziția finală triunghiul are aceeași orientare ca și cel inițial, deoarece cele trei rotații succesive păstrează orientarea; deci el s-a deplasat, dar a rămas paralel cu el însuși. Prin urmare, *BC este paralel cu B″C″*.

Să urmărim diferitele poziții ocupate de triunghiurile *EFG* și *UVW* în cursul reflexiilor succesive. Acestea sînt arătate în fig. 21 prin linii punctate și haşurate. Din lema noastră relativă la triunghiul *EFG* vedem imediat că a doua poziție a lui *EG* formează o linie dreaptă cu prima poziție a lui *FE*. În mod analog, cîte o latură a lui *EFG* se va afla în continuarea liniei *FE* în fiecare dintre pozițiile ulterioare. Prin urmare, linia dreaptă *EE″* este formată din șase segmente, două egale cu *FG*, două cu *GE* și două cu *EF*; astfel *ea este egală cu dublul perimetrului lui EFG.*

Urmărind pozițiile parcurse de triunghiul *UVW* în același mod, *găsim linia frîntă UV′W′U′V″W″U″, care unește U* cu *U″*, *și este egală cu dublul perimetrului triunghiului UVW.*

Am văzut că segmentele *UE* și *U″E″* sînt paralele, deoarece ele se află pe *BC* și *B″C″*. Ele sînt de asemenea egale, deoarece sînt segmente corespunzătoare în două poziții ale triunghiului *ABC*. Conform unei teoreme

de geometrie plană, $EE''UU''$ este un paralelogram, astfel încît și celelalte laturi ale sale sînt egale, $UU'' = EE''$. Deci UU'' este de asemenea egal cu dublul perimetrului lui EFG. Linia dreaptă UU'', care unește pe U cu U'', este mai scurtă decît linia frîntă care unește aceleași puncte, și care este egală cu dublul perimetrului lui UVW. Prin urmare, perimetrul lui EFG este inferior perimetrului lui UVW, ceea ce trebuia demonstrat.

Această demonstrație este tipică pentru multe demonstrații matematice. Ea constă în esență în a prelucra ipotezele și concluzia pînă cînd adevărul ascuns al teoremei devine evident.

VI

O a doua demonstrație a aceleiași proprietăți de minim

1. În capitolul precedent am demonstrat că dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi cu unghiurile ascuțite triunghiul format cu picioarele înălțimilor are perimetrul minim. Este interesant să considerăm o altă demonstrație a aceleiași teoreme, deoarece această demonstrație va ilustra cîteva idei noi și, pentru scopurile noastre, metodele utilizate sînt de mai mare importanță și interes decît conținutul matematic al noilor teoreme. Demonstrația precedentă a lui H. A. Schwarz se sprijină în esență pe faptul că dreapta este distanța cea mai scurtă dintre două puncte, și face uz de ideea de reflexie a unei figuri față de o linie. Aceste două principii se află și la baza celei de-a doua demonstrații. Este interesant de a compara felul în care aceste principii sînt folosite în cele două demonstrații. Demonstrația care urmează a fost dată de L. Fejér, pe cînd era student, dobîndind astfel o deosebită considerație din partea lui H. A. Schwarz.

2. În triunghiul dat ABC (fig. 22) fie UVW un triunghi înscris, arbitrar, cu U pe BC, V pe CA, W pe AB. Consi-

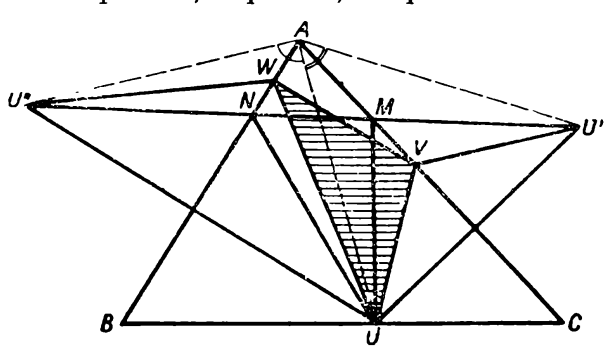


Fig. 22

derăm reflexia lui U față de liniile AC și AB și fie U' și U'' cele două imagini. UV și $U'V$ sînt reflexii reciproce și, prin urmare, egale. Pentru același motiv UW și $U''W$ sînt de asemenea egale. Perimetrul triunghiului UVW este $UV + VW + WU$ și, prin urmare, este egal cu lungimea liniei frînte $U'VWU''$.

Dacă păstrăm pe U fix și deplasăm pe V și W în alte poziții, atunci punctele U' și U'' rămîn fixe din cauză că ele depind numai de U și de triunghiul ABC. Linia $U'VWU''$ unește, în acest caz, punctele fixe U' și U'', iar lungimea sa este totdeauna egală cu perimetrul lui UVW. Cel mai scurt drum de la U' la U'' este linia dreaptă. Prin urmare, segmentul $U'U''$ este cel mai mic perimetru posibil pentru un triunghi înscris care are vîrful în U. Acest triunghi minim cu vîrful în U pe care îl vom nota cu UMN este arătat în fig. 22.

3. După ce am găsit triunghiul cu cel mai mic perimetru avînd vîrful în U, este suficient doar să comparăm triunghiurile minime pentru diferitele poziții ale lui lui U și să găsim pe cel cu perimetrul minim. Acest triunghi va avea cu siguranță perimetrul cel mai mic dintre toate triunghiurile înscrise.

Trebuie să determinăm poziția lui U astfel încît segmentul $U'U''$ să fie cît mai mic posibil. În acest scop observăm mai întîi că triunghiul $AU'U''$ este isoscel, avînd AU' și AU'' egale. Într-adevăr, aceste două segmente sînt amîndouă imagini ale segmentului AU prin reflexie și, deci, sînt egale, $AU = AU' = AU''$.

Deși laturile triunghiului $AU'U''$ sînt egale cu AU și, prin urmare, depind de poziția lui U pe BC, *mărimea unghiului $U''AU'$ nu depinde de poziția lui U*. Acest unghi este complet determinat de poziția inițială a triunghiului ABC și numai de ea, deoarece (pe baza reflexiilor) avem următoarele egalități între unghiurile din figură:

$$\widehat{UAB} = \widehat{U''AB}, \quad \widehat{UAC} = \widehat{U'AC}.$$

Din prima avem:

$$\widehat{U''AU} = 2\widehat{UAB},$$

și din a doua:

$$\widehat{U'AU} = 2\widehat{UAC};$$

și deci:

$$\widehat{U'AU} + \widehat{U''AU} = 2\widehat{UAB} + 2\widehat{UAC}$$

sau:

$$\widehat{U'AU''} = 2\widehat{BAC},$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră despre unghiul $U'AU''$.

4. În triunghiurile isoscele $AU'U''$ urmărim să facem baza $U'U''$ cît mai mică. Deoarece unghiul din A nu depinde de U, toate aceste triunghiuri pentru diferitele poziții ale lui U au același unghi în vîrf. Dintre toate acestea, cel cu baza cea mai mică va avea laturile cele mai mici. Laturile AU' și AU'' au lungimea AU. Prin urmare, vom obține cel mai scurt segment $U'U''$ dacă alegem pe U astfel încît AU să fie cît mai mic.

Segmentul AU unește punctul A cu latura BC și este bine cunoscut că distanța cea mai scurtă de la un punct la o dreaptă este perpendiculara coborîtă din acel punct pe dreaptă. Prin urmare, trebuie să alegem pe U astfel încît AU să fie perpendicular pe BC, deci AU să fie înălțimea corespunzătoare vîrfului A în triunghiul ABC.

5. Să construim acum triunghiul EFG de perimetru minim (fig. 23). Fie E piciorul perpendicularei coborîte

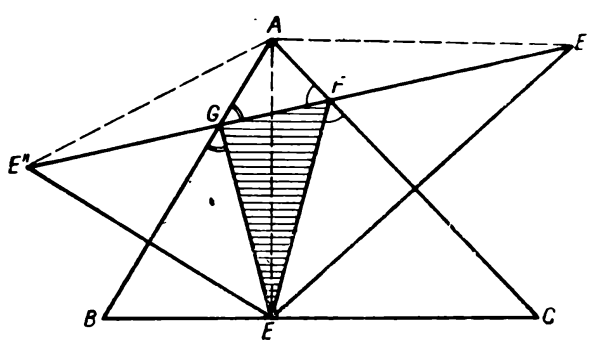


Fig. 23

din A pe BC. Dacă E' și E'' sînt imaginile lui E prin reflexie față de AC și AB, atunci $E'E''$ este lungimea celui mai mic perimetru de triunghi înscris. Cele două puncte F și G în care $E'E''$ intersectează AC și AB sînt celelalte vîrfuri ale triunghiului minim.

Dacă ne gîndim din nou la ceea ce am făcut, vedem că orice triunghi înscris UVW, diferit de EFG, trebuie să aibă un perimetru mai mare. Pentru că dacă U este diferit de E, atunci segmentul $U'U''$ este mai mare decît $E'E''$ și perimetrul lui UVW este cel puțin cît $U'U''$. Dacă U și E coincid, atunci unul sau ambele dintre punctele V și W vor fi diferite de punctele F și G, și linia $E'VWE''$ va diferi de linia dreaptă $E'FGE''$. În ambele cazuri perimetrul lui UVW va fi mai mare decît perimetrul EFG.

6. Considerațiile acestea au arătat că problema de a găsi un triunghi înscris cu perimetrul minim are o singură soluție. Vom face uz de unicitatea soluției. Construcția triunghiului minim nu tratează toate trei vîrfurile în același mod. Un vîrf E este piciorul înălțimii din A, dar celelalte două au fost găsite printr-o construcție care nu are nimic comun cu înălțimile din B și C.

Am fi putut să începem construcția noastră cu vîrful B în loc de A, adică în § 2, în loc de a reflecta punctul U față de laturile AB și AC am fi putut reflecta punctul V în BA și BC și să continuăm în mod similar. Am fi sfîrșit atunci cu un triunghi minim, al cărui vîrf F ar fi fost piciorul perpendicularei din B. Deoarece există un singur triunghi minim, această construcție care începe cu B ne-ar fi condus exact la același triunghi EFG ca și construcția începînd din A. Deoarece am fi putut, de asemenea, să începem construcția pornind din vîrful C, putem conchide că în triunghiul minim EFG nu numai E, dar și F și G sînt picioare de înălțimi. Am demonstrat astfel teorema.

7. Putem obține încă ceva din demonstrație. Făcînd uz de unicitatea soluției, am văzut că dacă E are o anumită proprietate (de a fi picior de înălțime) atunci și F și G au proprietatea corespunzătoare. Analog, orice proprietate pe care o au F și G prin construcția noastră o va avea și E. Întrucît E' este reflexia lui E, unghiurile EFC și $E'FC$ sînt egale. Deoarece $E'FC$ și GFA sînt unghiuri

opuse la vîrf, ele sînt de asemenea egale, deci $\widehat{EFC} = \widehat{GFA}$. Aceasta înseamnă că cele două laturi ale triunghiului minim care pornesc din F formează unghiuri egale cu latura AC a triunghiului inițial. Afirmația corespunzătoare este adevărată și pentru G. Dacă am fi pornit construcția din F ca picior al înălțimii din B, atunci aceeași demonstrație ar fi arătat că unghiurile GEB și FEC sînt, de asemenea, egale.

Neglijînd proprietatea de minim a triunghiului EFG, știm din § 6 că EFG poate fi caracterizat ca triunghi format de picioarele înălțimilor. Combinînd aceste două rezultate obținem teorema: laturile triunghiului format de picioarele înălțimilor într-un triunghi ascuțit-unghi formează cu laturile triunghiului considerat unghiuri egale.

Această teoremă nu mai conține acum nimic referitor la minim. Ea este de tipul teoremelor care se găsesc în mod obișnuit în geometria elementară și ar putea fi demonstrată prin metode aparținînd acestei geometrii. Într-adevăr, am făcut acest lucru în capitolul V. Demonstrația lui Schwarz are nevoie de acest rezultat ca de o lemă pe care am demonstrat-o cu ajutorul unor teoreme relative la cerc. Un avantaj al demonstrației lui Fejér este că ea nu face uz de nimic altceva decît de principiul distanței celei mai scurte și de legile reflexiei. În plus, demonstrația lui Fejér este remarcabilă și prin faptul că necesită numai două reflexii, pe cînd aceea a lui Schwarz folosește șase.

8. Există un fapt complimentar teoremei despre triunghiul format de picioarele înălțimilor: în orice triunghi ascuțit-unghi există un punct și numai unul, pentru care suma distanțelor la cele trei vîrfuri este minimă. Acest punct este astfel situat, încît liniile care îl unesc cu cele trei vîrfuri formează unghiuri de 120°, două cîte două.

Această teoremă a fost demonstrată de L. Schruttka cu o metodă găsită prin analogie cu demonstrația lui Schwarz de mai sus. O demonstrație mult mai simplă, dată de Bückner, este cea de mai jos.

Fie P (fig. 24a) un punct arbitrar din triunghiul ascuțit-unghi ABC. Rotim triunghiul ACP în jurul punctului A cu 60°, pînă în poziția $AC'P'$. Această rotație trebuie

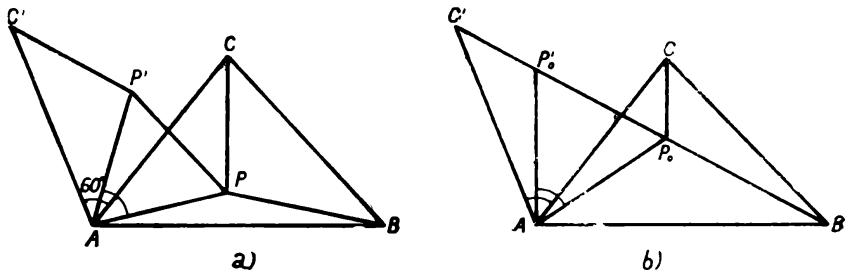


Fig. 24

făcută într-un anumit sens, așa fel încît AC să iasă afară din triunghi și să fie situată între AB și AC'. Vom avea $C'P' = CP$ și $PP' = AP$, deoarece triunghiul APP' nu este numai isoscel, ci și echilateral, avînd în A un unghi de 60°. Prin urmare, *linia $BPP'C'$ reprezintă suma distanțelor de la P la cele trei vîrfuri A, B, C.*

Punctul C' este independent de poziția lui P. Toate drumurile corespunzătoare diferitelor poziții ale lui P unesc B și C'. Cel mai scurt dintre aceste drumuri este linia dreaptă BC' (fig. 24b). Prin urmare, punctul minimal P_0 trebuie să se afle pe BC', iar poziția sa este complet determinată de faptul că unghiul $AP_0C' = 60°$. Unghiul suplimentar AP_0B este, prin urmare, de 120°. Construcția arată că poate exista numai un singur punct minimal P_0. Prin urmare, aceeași construcție, în care înlocuim pe A cu un alt vîrf, va conduce tot la P_0. Așadar, unghiurile BP_0C și CP_0A sînt de asemenea de 120°.

VII

Teoria mulțimilor

Subiectul acestui capitol stă la temelia matematicii. Totuși, interesul nostru față de problemele ce urmează a fi prezentate constă mai mult în frumusețea și simplitatea cu care ele sînt prezentate decît în importanț lor pentru matematică. Teoria mulțimilor, creată de Georg Cantor, este o teorie cu adevărat matematică. Ea pornește de la cele mai simple concepte și construiește un important edificiu ramificat, bazat pe folosirea raționamentului pur.

Există mai multe numere întregi decît numere pare? Care sînt mai multe, punctele de pe un segment sau punctele dintr-un pătrat? Problemele de acest fel stau la baza teoriei lui Cantor. Este important să evităm concluziile pripite cînd încercăm să răspundem la aceste probleme. Astfel de probleme nu sînt precise, deoarece nu știm exact ce se înțelege în acest caz prin mai mult și mai puțin.

Primul pas important făcut de Cantor a fost de a da acestora un înțeles precis, folosind metode simple de numărare, așa cum se procedează pentru numerele finite, și făcînd distincție netă între numerele cardinale și ordinale, distincție care pentru numerele finite este mai mult de ordin gramatical.

Un exemplu simplu va scoate în evidență direcția în care trebuie să mergem. Să presupunem că ne aflăm într-o sală de dans și sîntem întrebați dacă sînt mai mulți bărbați sau mai multe femei în sală. Care este modul cel mai simplu de a decide? O metodă ar fi de a separa bărbații și femeile în două grupuri, de a număra pe fiecare și de a compara numerele obținute. O metodă mai simplă totuși ar fi de a începe dansul. Bărbații și femeile se vor

grupa în perechi, și rămîne numai să observăm dacă cei care au rămas în afara dansului sînt bărbați sau femei. Trebuie să presupunem însă că toți cei care găsesc un partener disponibil dansează.

Acest principiu de grupare în perechi a fost adoptat de Cantor ca punct de plecare. Pentru a vedea dacă există mai multe numere întregi decît numere pare trebuie să încercăm să le grupăm în perechi. Într-adevăr, putem găsi o grupare în perechi în care fiecare număr întreg este asociat cu un număr par și numai cu unul. Vom face aceasta în felul următor:

1, 2, 3, 4, 5, 6,...

2, 4, 6, 8, 10, 12,...

unde fiecare număr întreg din rîndul de sus este asociat cu numărul par așezat sub el. Prin această metodă, orice număr este grupat într-o pereche. Acest fapt simplu este cu totul remarcabil. Cele două șiruri au fost grupate în perechi care le epuizează, deși șirul de jos este format numai dintr-o parte din șirul de sus.

Aceasta pune în evidență diferența esențială între cazul considerat și cazul numerelor finite. În cazul unei săli de dans (în care există un număr finit de dansatori), pentru a compara numărul bărbaților și al femeilor este cu totul lipsit de importanță care anume dintre bărbați dansează cu o anume femeie. Numărul acelora care nu dansează este întotdeauna același și nu se schimbă atîta vreme cît nu vin noi persoane în sală. Situația este cu totul alta în cazul numerelor întregi și al numerelor pare. Am arătat mai sus o grupare în perechi a acestora, care cuprinde fiecare număr întreg și fiecare număr par, dar este ușor să indicăm o alta în care lucrurile nu se întîmplă astfel. Putem folosi cea mai naturală grupare în perechi: 2 cu 2, 4 cu 4, 6 cu 6 etc. Am grupat astfel o parte dintre numerele întregi cu toate numerele pare, iar numerele impare au rămas în afară. Esența teoriei lui Cantor este în a abandona grupările arbitrare în perechi și a căuta numai grupările care se fac exact. Dacă o asemenea grupare există, cele două mulțimi se consideră că au *aceeași putere*.

Cantor a demonstrat apoi că *mulțimea numerelor raționale, adică toate numerele întregi și fracționare, nu are o putere mai mare decît mulțimea numerelor întregi.* Pentru a obține gruparea în perechi necesară vom aranja fracțiile nu în ordinea mărimii, ci în raport cu mărimea sumei dintre numărător și numitor. Considerînd numai fracții reduse, începem cu acelea pentru care suma dintre numărător și numitor este egală cu 2. Există numai o singură fracție de acest fel: $1/1 = 1$. Acelea pentru care suma este 3 sînt $1/2$ și $2/1 = 2$. Urmează $1/3$, $2/2$, $3/1$, cu suma 4, dar $2/2$ este omis pentru că nu este fracție redusă. Acestea se continuă cu $1/4$, $2/3$, $3/2$, $4/1$ etc. Să scriem acum fracțiile în această ordine sub șirul numerelor naturale,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,...

1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 5, 1/6,...

și grupăm fiecare număr întreg cu fracția de sub el. Șirul inferior cuprinde toate numerele raționale, deoarece fiecare număr rațional scris sub formă redusă are o sumă a numărătorului cu numitorul bine determinată și, prin urmare, își găsește un loc în rînd. Astfel găsim gruparea dorită.

Acest rezultat surprinzător se exprimă spunînd că mulțimea numerelor raționale este numărabilă, deoarece gruparea în perechi cu numerele naturale este de fapt o numărare a numerelor raționale. În general, o mulțime este numărabilă dacă poate fi grupată în perechi cu numerele naturale, adică dacă are aceeași putere cu mulțimea numerelor naturale. Cantor continuă arătînd că alte mulțimi cu mult mai bogate decît mulțimea numerelor naturale nu au de fapt o putere mai mare. Vom trece peste aceste exemple, deoarece ele cuprind concepte matematice mai evoluate și exemplul considerat de noi mai sus este suficient.

Teoria lui Cantor ar fi banală dacă nu ar exista și mulțimi de putere mai mare decît mulțimea numerelor naturale. Cantor a arătat că există mulțimi de putere mai mare, demonstrînd că *mulțimea punctelor de pe un segment de dreaptă este de putere mai mare decît mulțimea numerelor naturale.* Demonstrația se face prin reducere la absurd. Vom presupune că există o grupare în perechi

între punctele situate pe un segment de lungime 1 și numerele naturale, și vom arăta că aceasta conduce la o contradicție. Această grupare în perechi așază punctele într-o ordine în care primul este acela aflat în perechea care conține pe 1, al doilea cel din perechea care conține pe 2 etc., dar ordinea astfel obținută nu este ordinea naturală a punctelor de pe o dreaptă. Se obișnuiește să se identifice fiecare punct cu distanța sa pînă la un capăt al segmentului. De exemplu, mijlocul segmentului corespunde numărului 0,5 și fiecare punct corespunde unei fracții zecimale. Pentru a face această corespondență precisă trebuie să întrebuințăm un număr infinit de zecimale; de exemplu capătul primei treimi din segment corespunde lui 0,33333... În gruparea în perechi a punctelor de pe segment cu numerele naturale putem să folosim fracțiile zecimale infinite în locul punctelor înseși. Pe primul loc vom așeza o fracție 0,... corespunzătoare lui 1, în al doilea loc o fracție asemănătoare, corespunzătoare lui 2 etc. Este ușor să așezăm aceste numere într-o coloană verticală care ne va furniza o listă de tipul arătat mai jos, în care am introdus numere particulare pentru fixarea ideilor.

1. 0,35420...
2. 0,61773...
3. 0,55549...
4. 0,01007...
5. 0,20206...

. . . . . .

. . . . . .

Vom arăta acum că există o fracție zecimală 0,..., care, contrar ipotezei, nu intră în lista precedentă. Această fracție poate fi găsită după cum urmează: alegem ca primă zecimală după 0 un număr care este diferit de prima zecimală a primului număr din listă. Aceasta ne dă posibilitatea de a alege din nouă cifre disponibile. Pentru a preciza acest lucru vom alege cifra 1 în afară de cazul în care prima cifră a numărului din fruntea listei este 1, în care caz îl vom alege pe 2. Acum este clar că primul număr din lista noastră va fi diferit de numărul pe care voim să-l formăm, indiferent de cifrele

pe care le vom alege ulterior, pentru că cele două numere vor diferi prin prima zecimală, chiar dacă au celelalte zecimale identice. Vom alege acum drept a doua cifră pe 1, ca și mai sus, în afară de cazul în care a doua zecimală a celui de-al doilea număr din lista noastră este 1, în care caz îl vom alege pe 2. Prin urmare, în orice caz, a doua cifră a numărului pe care îl formăm este diferită de a doua cifră a celui de-al doilea număr din listă. Astfel numărul nostru va fi diferit de-al doilea număr din listă, pentru același motiv ca mai sus. Continuăm alegerea zecimalelor în acest mod. În exemplul considerat numărul nostru va începe cu zecimalele 0,12111... Deoarece procesul poate fi continuat la nesfîrșit, obținem o fracție zecimală, care este diferită de toate fracțiile din listă. Faptul că lista nu conține această fracție contrazice ipoteza că am grupat toate fracțiile subunitare cu numerele întregi. Prin urmare, punctele de pe un segment de dreaptă nu sînt numărabile.

Există o anumită obiecție care poate fi ridicată demonstrației precedente și pe care trebuie să o menționăm. Ea se datorește fracțiilor care sfîrșesc cu un șir infinit format de cifra 9, ca de exemplu 0,269999..., care nu este diferit de 0,270000... = 0,27. Dificultatea este că două fracții zecimale diferite pot reprezenta același punct dacă una dintre ele are toate zecimalele egale cu 9, începînd de la o anumită zecimală încolo, și aceasta înseamnă că nu este corect de a înlocui punctele segmentului cu mulțimea tuturor fracțiilor zecimale [1]. Cele două mulțimi nu coincid strict vorbind. Cantor a evitat această dificultate punînd demonstrația într-o formă cu totul diferită, dar există o cale foarte simplă de a elimina această obiecție. Vom lăsa de o parte fracțiile zecimale care au toate zecimalele egale cu 9, începînd de la o anumită zecimală. Cu alte cuvinte nu vom identifica nici un punct cu 0,269999... ci cu 0,270000... Trebuie să ne asigurăm că numărul construit de noi nu este dintre cele eliminate. Dar acest lucru nu se întîmplă, deoarece numărul nostru

---

[1] Pentru o discuție mai dezvoltată a se vedea R. Courant și H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1941, pp. 64—66, pp. 80—82.

este format numai cu cifrele 1 și 2 și nu conține nici o cifră egală cu 9.

Acest rezultat are o consecință interesantă. Deoarece mulțimea numerelor raționale este numărabilă, vedem că ea este de putere inferioară mulțimii tuturor numerelor dintre 0 și 1. Prin urmare, trebuie să existe cel puțin un număr între 0 și 1 care nu este rațional. Astfel am stabilit existența numerelor iraționale cu ajutorul unor considerații cu totul generale. Același fapt a fost demonstrat într-un mod cu totul diferit în capitolul IV.

Rezultatul lui Cantor, care urmează acum, este cu totul surprinzător. El stabilește că *mulțimea punctelor situate pe suprafața unui pătrat nu este de putere mai mare decît mulțimea punctelor de pe o latură a pătratului.* Acest fapt este uimitor, deoarece el contrazice ideea intuitivă de dimensiune. Un segment unidimensional are aceeași putere ca un pătrat bidimensional, și se poate dovedi că un cub tridimensional are de asemenea aceeași putere.

Ca și în demonstrația precedentă, vom folosi fracții zecimale infinite și vom exclude din nou pe acelea ale căror zecimale coincid cu 9, începînd de la o anumită zecimală. Punctele segmentului vor fi din nou reprezentate prin zecimale 0,... ca și mai înainte. Punctele pătratului vor fi caracterizate de o pereche de zecimale, dintre care o zecimală x reprezintă distanța orizontală de la latura din stînga a pătratului, iar alta reprezintă distanța verticală pînă la latura inferioară a pătratului (fig. 25). Vom forma o grupare în perechi în modul următor: fiecare punct P al pătratului este caracterizat prin două numere zecimale.

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ldots,\quad b = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ldots\ .$$

Din acestea două formăm un singur număr zecimal

$$z = 0,\ a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

prin alternarea cifrelor lui x și y. Apoi grupăm punctul P al pătratului cu punctul Q al segmentului corespunzător fracției zecimale z. De exemplu, centrul pătratului are $x = 0{,}500\ldots$, $y = 0{,}500\ldots$, și lui i se asociază punctul de pe segment corespunzător lui $z = 0{,}550000\ldots$. În acest

fel fiecărui punct al pătratului i se asociază un anumit punct al segmentului. Dar acest lucru nu este suficient. Dacă ar trebui numai să asociem fiecărui punct din pătrat un punct din segment, ar fi mai simplu să asociem fiecărui punct P punctul de deasupra lui, situat pe latura superioară a pătratului. Dar în acest caz fiecare punct de pe latură ar fi asociat nu numai cu un singur punct din pătrat, ci cu o infinitate (toate punctele de pe o linie verticală). Acest lucru nu este îngăduit în metoda lui Cantor de comparare a puterilor de mulțimi, după cum în cazul dansatorilor nu puteam presupune că o persoană ar dansa cu mai mulți parteneri. Metoda noastră inițială de grupare în perechi, mai rafinată, evită acest inconvenient. Dacă un al doilea punct P' al pătratului, să spunem

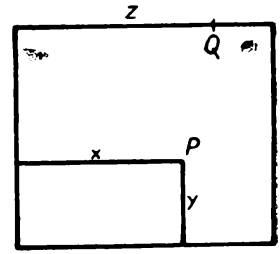


Fig. 25

$$x' = 0,\ a_1'a_2'a_3'\ldots,\ y' = 0,\ b_1'b_2'b_3'\ldots,$$

ar fi grupat cu același punct Q al segmentului, atunci am avea

$$z = 0,\ a_1'b_1'a_2'b_2'a_3'b_3'\ldots .$$

Această fracție zecimală, egală cu z, trebuie să coincidă cu cea precedentă și, prin urmare, zecimalele lor coincid,

$$a_1' = a_1,\ b_1' = b_1,\ a_2' = a_2,\ b_2' = b_2,\ldots .$$

Dar aceasta arată că zecimalele lui x' sînt egale cu zecimalele corespunzătoare ale lui x, și analog pentru y' și y. Prin urmare, avem $x' = x$, $y' = y$, deci P' coincide cu P, contrar ipotezei. Așadar, două puncte diferite ale pătratului nu sînt grupate niciodată cu același punct al segmentului.

Pentru a termina, trebuie să arătăm că orice punct al segmentului este asociat unui punct din pătrat. Aceasta se vede ușor, deoarece dacă

$$z = 0,c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots$$

corespunde unui punct din segment, atunci punctul din pătrat reprezentat de

$$x = 0,c_1c_3c_5..., \qquad y = 0,c_2c_4c_6...$$

este asociat cu punctul corespunzător.

Există de asemenea o obiecție la această demonstrație, datorită fracțiilor care au o infinitate de cifre egale cu 9 începînd de la o anumită zecimală încolo. Punctul de pe segment asociat fracției $z = 0,2202020...$ este grupat cu punctul pătratului pentru care

$$x = 0,2000..., \qquad y = 0,2222... .$$

Punctul de pe segment cu $z' = 0,12929292...$ este asociat cu punctul din pătrat, pentru care

$$x' = 0,1999..., \qquad y' = 0,2222...,$$

dar aci avem o fracție care are toate zecimalele egale cu 9, începînd de la a doua, și trebuie să scriem $x' = 0,2000...$ Astfel cele două puncte diferite ale segmentului care corespund lui z și z' sînt grupate cu același punct al pătratului.

Un artificiu extrem de simplu, dar nebanal, va elimina această dificultate. În forma în care a fost descrisă mai sus demonstrația nu este corectă, dar dacă facem modificarea de mai jos ea devine riguroasă. Fiecare zecimală egală cu 9 care apare într-o fracție zecimală va fi combinată cu cifra din dreapta sa pentru a forma o „moleculă" inseparabilă. Dacă există mai mulți de 9 consecutivi, îi vom include pe toți împreună cu cifra din dreapta ultimului 9 în moleculă. Astfel, în exemplul considerat mai sus vom avea 0, (1)(2) (92) (92) (92)... și ca un alt exemplu vom scrie $z'' = 0$, (7) (3) (94) (990) (9997)... . Aceste molecule vor lua locul zecimalelor din demonstrație, astfel încît pentru z'', de exemplu, vom avea

$$x'' = 0,(7)(94)\ (9997)..., \qquad y'' = 0,\ (3)\ (990)...$$

Gruparea în perechi obținută astfel este cu totul diferită de cea precedentă, dar după un moment de gîndire putem vedea că demonstrația poate fi continuată fără dificultăți atîta timp cît ținem seamă de regula privitoare la fracțiile ordinare care conțin zecimala 9.

La acest punct Cantor întîlnește o problemă care a devenit de atunci celebră; există o mulțime care să aibă o putere mai mare decît mulțimea numerelor naturale și, în același timp, mai mică decît mulțimea punctelor unui segment?

Această problemă a fost numită „problema continuului". Ea a rezistat tuturor încercărilor lui Cantor de a-i găsi un răspuns, ca și tuturor încercărilor făcute de succesorii acestuia[1]. Probabil nici o problemă matematică formulată cu o pregătire matematică atît de redusă n-a rezistat cu mai multă împotrivire încercărilor de rezolvare ca aceasta. Singurele concepte folosite în formularea acestei probleme sînt acelea de număr întreg și segment de dreaptă. Nu este greu de a propune probleme dificile cu ajutorul unor idei matematice complicate. A formula însă probleme matematice dificile folosind numai idei simple constituie adevărata artă a matematicii. Considerată din acest punct de vedere, problema continuului este un strălucit exemplu.

În scurt timp s-a ajuns la concluzia că fundamentele teoriei mulțimilor, pe care se întemeiază întreaga matematică, nu pot fi dezvoltate pînă cînd nu se stabilește riguros ce este aceea o mulțime. Sîntem nevoiți să facem acest lucru datorită următorului *paradox* celebru din teoria mulțimilor.

Am vorbit despre mulțimi. Mulțimile sînt formate din elemente de un fel sau altul. Mulțimea punctelor unui segment conține ca elemente punctele segmentului. Mulțimea numerelor întregi are ca elemente numerele întregi. Relația dintre mulțimi și elemente este similară aceleia dintre o asociație și membrii săi. Uneori o asociație are ca membri nu indivizi, ci asociații. De exemplu, O.N.U. este o asociație de națiuni, dintre care fiecare este o asociație de cetățeni. Relația de a fi membru al O.N.U. are sens relativ la țări și nu la cetățenii țărilor respective. În același mod o mulțime poate să conțină mulțimi ca elemente. Un exemplu este mulțimea tuturor mulțimilor

---

[1] Problema a fost rezolvată recent de matematicianul american Paul Cohen. Pentru acest rezultat a fost distins cu medalia Fields la Congresul Internațional de matematică de la Moscova din 1966. — *N. T.*

numărabile avînd ca elemente mulțimi. A fi cetățean al unei națiuni care face parte din O.N.U. nu înseamnă a fi membru în O.N.U. În mod asemănător, numărul 1/5 este un element al mulțimii numerelor raționale, care s-a dovedit numărabilă, dar aceasta nu înseamnă că el este un element al mulțimii tuturor mulțimilor numărabile.

Este posibil ca o mulțime să se conțină pe ea însăși ca element? Mulțimile obișnuite pe care le considerăm nu au această proprietate. Totuși este ușor de a găsi exemple care să arate că există asemenea mulțimi neobișnuite. Mulțimea tuturor mulțimilor care se pot concepe este de acest tip, întrucît ea însăși este o mulțime și deci un element al său. Pentru moment vom numi mulțime extraordinară o mulțime care se conține pe ea însăși ca element, iar celelalte mulțimi vor fi numite mulțimi ordinare.

Să considerăm mulțimea tuturor mulțimilor ordinare și să o notăm cu *s*. Este *s* o mulțime ordinară sau extraordinară? Ea trebuie să fie de un fel sau altul. Dacă *s* este extraordinară, atunci ea trebuie să se conțină ca element, dar atunci *s* este un element al lui *s*, adică o mulțime ordinară, ca toate elementele lui *s*. Aceasta este o contradicție, deci *s* nu este extraordinară. Totuși dacă *s* este ordinară, atunci ea nu se conține ca element. Prin urmare, *s* nu este element al lui *s*, care conține toate mulțimile ordinare și, prin urmare, *s* nu este ordinară. Aceasta este de asemenea o contradicție, deci *s* nu este ordinară. Am ajuns la un paradox: *s* trebuie să fie ordinară sau extrordinară, dar fiecare posibilitate conduce la o contradicție.

Acest paradox nu este strict specific teoriei mulțimilor. Pentru a-l lămuri îl vom reformula într-un mod mai puțin serios. Această nouă formulare este independentă de ideea de mulțime. Într-un anumit regiment un soldat este obligat să îndeplinească funcția de bărbier. Datoria sa este să radă pe toți membrii regimentului care nu se bărbieresc singuri. Se întreabă dacă acest soldat se va rade. Dacă el se rade, atunci el este unul dintre acei soldați care se bărbieresc singuri și datoria sa este să nu

se radă. Dacă nu se rade singur, atunci el face parte dintre soldații care nu se rad singuri și prin urmare calcă din nou dispozițiile primite. Ce trebuie să facă soldatul ca să respecte ordinul?

Paradoxul este pur logic. Ajungem în mod inevitabil la el în teoria mulțimilor, dar este mult mai general decît ea și nu necesită pentru a fi formulat noțiuni de teoria mulțimilor. Vechea știință cam plicticoasă a logicii a devenit o ramură deosebit de interesantă. De fapt atît matematicienii, cît și logicienii lucrează de mai mult timp la eliberarea logicii de forma sa veche aristoteliană, dar în momentul de față este dificil de a ști ce formă nouă va lua.

VIII

Cîteva probleme combinatorii

1. Un exemplu simplu ne va arăta tipul de probleme pe care le vom considera acum. Să presupunem că avem patru mingi roşii (R), o minge galbenă (Y) şi două mingi albe (W). Aceste mingi sînt presupuse de aceeaşi mărime şi greutate şi cu totul identice, exceptînd culoarea. Presupunem, de asemenea, că avem două urne A şi B. Urna A conţine exact trei mingi, iar B patru. *În cîte moduri diferite pot fi distribuite cele şapte mingi colorate între cele două urne A şi B.*

Deoarece avem un caz extrem de simplu, cu numai două urne, putem să considerăm numai mingile care se introduc în A. Cele patru mingi care rămîn se vor introduce în B. Pentru a răspunde problemei noastre vom forma în mod sistematic toate posibilităţile. În primul rînd, A poate conţine numai mingi roşii şi restul rămîne urnei B:

1. în A : RRR, în B : $RYWW$.

Nu contează care dintre cele trei mingi roşii se introduc în A, deoarece am presupus că mingile nu se deosebesc una de alta, în afară de culoare.

Apoi A ar putea conţine numai două mingi roşii, în care caz a treia minge trebuie să fie galbenă sau albă. Aceasta conduce la două posibilităţi:

2. în A : RRY, în B : $RRWW$,

3. în A : RRW, în B : $RRYW$.

Dacă A conține o singură minge roșie, atunci celelalte două trebuie să fie sau YW sau WW, conducînd la

$$4.\ \text{în}\ A : RYW,\ \text{în}\ B : RRRW,$$

$$5.\ \text{în}\ A : RWW,\ \text{în}\ B : RRRY.$$

În sfîrșit, dacă A nu conține mingi roșii, ea trebuie să conțină pe celelalte trei:

$$6.\ \text{în}\ A : YWW,\ \text{în}\ B : RRRR.$$

Prin urmare, vedem că există șase moduri posibile de a distribui patru mingi roșii, o minge galbenă și două mingi albe între două urne conținînd una trei și alta patru mingi. Este clar că n-are importanță ce culori au mingile; vom obține același rezultat luînd patru mingi negre, o minge verde și două mingi albastre; prin urmare, este necesar să știm numai numărul mingilor din fiecare culoare și nu care sînt culorile. Pentru a stabili rezultatul nostru mai rapid vom spune atunci: numărul de distribuții a 4, 1, 2 mingi între două urne de capacitate 3 și 4 este 6. Vom scrie acest fapt simbolic astfel:

$$\{4,\ 1,\ 2 \mid 3,4\}_7 = 6.$$

Aci numerele dinaintea barei verticale indică numerele de mingi pentru diferitele culori, iar numerele de după bară sînt numerele de mingi din fiecare urnă. *Suma numerelor dinaintea barei trebuie să fie egală cu suma numerelor de după bară*, deoarece toate mingile la un loc umplu toate urnele. Acest număr total de mingi, care în cazul nostru este 7, a fost scris ca indice inferior în dreapta acoladei.

2. Nu este necesar să considerăm numai trei culori și două urne. Ca o problemă generală am putea considera n mingi de c culori diferite și u urne de conținut total n. Vom avea atunci simbolul

$$(1) \qquad Z = \{r,\ s,\ldots \mid a,\ b,\ldots\}_n$$

pentru numărul de distribuții a n mingi, dintre care r au o culoare, s alta etc., în urne care au o capacitate de a, b,... mingi respectiv. Problema este de a calcula va-

loarea lui Z cunoscînd numerele n, r, s,...,a, b,.... Nu vom rezolva această problemă în forma sa generală, ci ne vom restrînge la un număr de exemple și la un caz particular important.

Problema nu necesită neapărat ca obiectele distribuite să fie mingi colorate. De exemplu, am întrebuințat mai înainte literele *RRRRYWW* pentru a indica patru mingi roșii, o minge galbenă și două mingi albe și am distribuit aceste șapte *litere* între *două mulțimi* A și B în loc de a distribui șapte *mingi* între două *urne* A și B.

3. Vom considera un număr de exemple care nu au nimic de-a face cu mingile colorate, dar vom căuta să găsim o cale de a interpreta fiecare caz ca o problemă de distribuire de mingi colorate. Aceste exemple sînt de un interes considerabil și ne vor servi pentru a arăta care este semnificația simbolului (1).

Exemplu I. În cîte moduri pot n persoane să fie așezate în n locuri? Pentru a interpreta această problemă în forma precedentă observăm că orice persoană poate fi deosebită de oricare alta. Prin urmare, putem indica fiecare persoană cu o culoare diferită, un nume, ca să spunem așa. Problema se reduce la: în cîte moduri pot fi distribuite n mingi de n culori diferite în n poziții diferite? Fiecare dintre aceste poziții corespunde în problema noastră inițială la o urnă în care încape exact o minge. Folosind simbolu, nostru, problema se reduce la a găsi valoarea lui

$$2) \qquad P_n = \{1,\ 1,\ldots \mid 1,\ 1,\ldots\}_n,$$

unde avem de n ori numărul 1 înaintea barei verticale, corespunzător celor n mingi diferit colorate, și de n ori numărul 1 după bara verticală, corespunzător celor n urne fiecare cu capacitatea de o minge.

Dacă ne gîndim la cele n urne sau poziții ca fiind așezate în linie, atunci se pune problema în cîte moduri putem așeza n mingi sau persoane (sau orice fel de obiecte diferite două cîte două) într-o singură linie? O asemenea așezare se numește o *permutare*, astfel putem spune că P_n de la (2) reprezintă numărul de permutări a n obiecte diferite.

Rămîne acum doar problema de a găsi valoarea numerică a lui P_n de îndată ce îl cunoaștem pe n. Vom găsi

o formulă pentru P_n în funcție de n, dar o vom da de-abia după ce vom considera cîteva exemple.

4. *Exemplul II.* În jocul *skat* sînt necesare 32 de cărți diferite și trei jucători. Fiecare jucător primește zece cărți și restul de două cărți rămîn în *skat.* În cîte moduri diferite pot fi distribuite cărțile? Este clar că numărul de moduri este același cu numărul de distribuiri a 32 de mingi diferit colorate în patru urne cu o capacitate de 10, 10, 10, 2 mingi respectiv. Prin urmare, numărul de moduri în care cărțile pot fi distribuite este dat de

$$S = \{1,\ 1,\ldots \mid 10,\ 10,\ 10,\ 2\}_{32}. \tag{3}$$

Vom lăsa din nou pentru mai tîrziu calculul acestui simbol.

5. *Exemplul III.* Așa-numita *teoremă a polinomului* este un alt exemplu interesant. Vom considera numai cazul particular a trei variabile x, y, z. Expresia

$$(x + y + z)^n$$

trebuie dezvoltată. Această putere de ordinul n reprezintă produsul a n factori egali cu $(x + y + z)$. Dacă o sumă de termeni dintr-o paranteză trebuie înmulțită cu un factor, atunci fiecare termen din paranteză trebuie să fie înmulțit cu acel factor. Dacă această regulă se aplică tuturor celor n paranteze din puterea de ordinul n considerată, atunci se vede că rezultatul este o sumă de produse. Fiecare dintre aceste produse are n factori, care pot să fie x, y sau z. Deoarece factorii produsului pot fi luați în orice ordine, putem lua toți x-ii împreună, apoi toți y-ii și apoi toți z-ii. Atunci fiecare produs va fi de forma $x^a y^b z^c$, unde a, b, c, sînt numere întregi supuse condițiilor

$$a + b + c = n,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0. \tag{4}$$

Pot să existe mai multe produse de forma $x^a y^b z^c$, cu aceleași valori, a, b, c. De cîte ori va apare acest factor cînd calculăm o putere de ordinul n? Fiecare dintre factorii x, y sau z poate să provină din fiecare dintre cele n paranteze. Ne putem imagina un șir de n urne fiecare corespunzînd unei paranteze. Atunci putem pune în fiecare urnă litera care provine din paranteza corespunză-

toare. Astfel trebuie să socotim doar în cîte moduri a elemente „x" (mingi roșii), b elemente „y" (mingi galbene) și c elemente „z" (mingi albe) pot fi distribuite în n urne cîte unul în fiecare urnă. Notînd acest număr prin $P^{(n)}_{a,b,c}$, vom avea

$$P^{(n)}_{a,b,c} = \{a,b,c \mid 1,1,..,1\}_n. \tag{5}$$

Dacă efectuăm produsul $(x+y+z)^n$, atunci termenul $x^a y^b z^c$ va apărea de $P^{(n)}_{a,b,c}$ ori. Termenii asemenea pot fi adunați, și termenul rezultat va avea coeficientul $P^{(n)}_{a,b,c}$.

Un caz particular ne va ajuta să facem acest rezultat mai clar. Să considerăm $n = 4$ și produsul $(x+y+z)^4$. Termenii de tipul $x^a y^b z^c$ vor apărea pentru toate valorile lui a, b, c care satisfac (4), în care se ia $n = 4$. Calculîndu-i sistematic, vom găsi următoarele 15 posibilități:

$$x^4,\quad y^4,\quad z^4,$$

$$x^3y,\ x^3z,\ xy^3,\ y^3z,\ xz^3,\ yz^3.$$

$$x^2y^2,\quad x^2z^2,\quad y^2z^2,$$

$$x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2.$$

Înzestrînd acești termeni cu coeficienți, obținem

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 &= P^{(4)}_{4,0,0}\,x^4 + P^{(4)}_{0,4,0}\,y^4 + P^{(4)}_{0,0,4}\,z^4 + \\ &+ P^{(4)}_{3,1,0}x^3y + P^{(4)}_{3,0,1}x^3z + P^{(4)}_{1,3,0}xy^3 + P^{(4)}_{0,3,1}y^3z + \\ &+ P^{(4)}_{1,0,3}xz^3 + P^{(4)}_{0,1,3}yz^3 + P^{(4)}_{2,2,0}x^2y^2 + P^{(4)}_{2,0,2}x^2z^2 + \\ &+ P^{(4)}_{0,2,2}y^2z^2 + P^{(4)}_{2,1,1},x^2yz + P^{(4)}_{1,2,1}xy^2z + P^{(4)}_{1,1,2}xyz^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Aceasta ne arată numai *forma* expresiei. Trebuie să găsim valorile coeficienților $P^{(4)}_{a,b,c}$ și, mai general, a coeficienților $P^{(n)}_{a,b,c}$.

6. *Exemplul IV.* În cîte moduri diferite putem alege k lucruri dintre n lucruri diferite? Acest număr se numește, de obicei, numărul combinărilor de n luate cîte k și se notează prin C^k_n. Cele n obiecte sînt toate diferite, astfel încît le putem considera ca fiind mingi diferit colorate, $r = 1$, $s = 1, \ldots$. Cele k mingi alese pot fi puse într-o singură urnă, $a = k$, și cele care rămîn pot fi puse în altă urnă,

de capacitate $b = n - k$. Numerele pe care trebuie să le determinăm sînt, prin urmare,

$$C_n^k = \{1,1, ..., 1 \mid k,\ n-k\}_n. \tag{7}$$

7. *Simetria simbolului de distribuție.* Simbolul pe care l-am folosit pentru a reprezenta numărul de distribuții are o proprietate extrem de importantă, care ne va ajuta să-l calculăm. Numerele dinaintea barei verticale și cele de după ea pot fi intervertite,

$$\{r,s,... \mid a,b,...\}_n = \{a,b,... \mid r,s,...\}_n. \tag{8}$$

Această formulă exprimă că numărul de distribuții a r mingi roșii, s albe, ... în urne de capacitate a, b,... este egal cu numărul de distribuții a a mingi roșii, b albe, ... în urne de capacitate r, s,... Presupunem, ca de obicei, că $r + s + ... = a + b + ... = n$.

Exprimată în acest fel, egalitatea (8) este ușor de dovedit. Un exemplu numeric simplu va ilustra complet demonstrația. Să considerăm egalitatea

$$\{3\ \ 4 \mid 1,\ 1,\ 5\}_7 = \{1,\ 1,\ 5 \mid 3,\ 4\}_7. \tag{9}$$

Partea întîi reprezintă numărul de distribuții a 3 mingi roșii și 4 mingi albe

$$R,\ R,\ R,\ W,\ W,\ W,\ W,$$

în trei urne, A și B, conținînd fiecare cîte o minge, iar C avînd o capacitate de 5 mingi. Să considerăm una dintre distribuțiile posibile. Să spunem

$$\underset{A}{|\,R\,|} \qquad \underset{B}{|\,W\,|} \qquad \underset{C}{|\,RRWWW\,|}.$$

Putem scrie această distribuție punînd mingile într-o linie și scriind sub fiecare urna în care este distribuită

$$R,\ W,\ R,\ R,\ W,\ W,\ W,$$

$$A,\ B,\ C,\ C,\ C,\ C,\ C. \tag{10 a}$$

Aceasta este o listă de șapte perechi de litere. Literele din primul rînd R și W reprezintă numele culorilor, iar literele din rîndul al doilea indică urnele. Putem inter-

verti rolurile literelor și presupune că A, B, C indică culorile, iar R și W urnele. Dacă scriem culorile în rîndul întîi, iar urnele în cel de-al doilea și rearanjăm perechile după urne obținem schema

$$A,\ C,\ C,\ B,\ C,\ C,\ C$$

(10 b) $$R,\ R,\ R,\ W,\ W,\ W,\ W.$$

Exact aceleași perechi apar în (10 b) ca și în (10 a), numai că au fost inversate rîndurile. Dar (10 b) poate fi interpretat ca reprezentînd o distribuție formată cu o minge de culoarea A, o minge de culoarea B, 5 mingi de culoarea C în urnele R și W, respectiv de capacitate 3 și 4. Dar aceasta este una dintre distribuțiile care au fost socotite în partea dreaptă a lui (9). Orice altă distribuție socotită în prima parte a lui (9) va corespunde unei distribuții din partea doua în același mod în care (10 a) corespunde lui (10 b). Această corespondență se stabilește în mod evident și în sensul opus de la (10b) la (10 a). Prin urmare, există o corespondență biunivocă (o „dualitate") între cele două probleme reprezentate de partea întîi și a doua a lui (9). Deoarece cele două mulțimi de distribuții sînt în corespondență biunivocă, ele trebuie să aibă același număr de elemente și, prin urmare, egalitatea (9) este adevărată.

Am demonstrat că cele două părți din (9) sînt egale, fără a cunoaște valoarea lor numerică. În acest caz, totuși, este ușor să formăm toate distribuțiile posibile în mod sistematic și astfel să găsim

$$\{3, 4 \mid 1, 1, 5\}_7 = \{1, 1, 5 \mid 3, 4\}_7 = 4.$$

Demonstrația lui (9) constă în a schimba culorile și urnele între ele. Nu mai este nevoie de o demonstrație detaliată pentru (8). Aceeași intervertire a urnelor cu culorile arată simetria dintre cele două probleme și justifică egalitatea (8).

8. *Calculul valorii distribuțiilor în anumite cazuri.* Calculul valorii lui $\{r, s, \ldots \mid a, b, \ldots\}_n$ pentru $r, s, \ldots, a, b, \ldots$ arbitrare este extrem de complicat și nu îl vom face. Simbolurile care au apărut în §§3—6 nu sînt de forma cea mai generală. Ele au particularitatea că fie numerele dinaintea

barei verticale, fie acelea de după bară, (ori ambele) constau toate din numărul 1. Adică sau toate mingile au culori diferite două cîte două sau fiecare urnă conține exact cîte o minge. În virtutea simetriei, putem considera numai cazul în care mingile au două cîte două culori diferite și avem de calculat

$$\{1,\ 1, ..., 1 \mid a, b, c, ...\}_n.$$

Indicele n ne amintește că există n mingi și că toate urnele au capacitatea totală de n mingi

$$1 + 1 + ... + 1 = a + b + c + ... = n.$$

Deoarece considerăm numai simboluri avînd înaintea barei verticale toate numerele egale cu 1, putem renunța de a le mai scrie, utilizînd notația prescurtată

$$\{1, 1, ..., 1 \mid a, b, c, ...\}_n = \{a, b, c, ...\}_n.$$

Numerele a, b, c, ..., reprezintă capacitățile urnelor și sînt supuse numai la restricția ca suma lor să fie n. Evident avem

$$\{n\}_n = 1 \tag{11}$$

pentru că există un singur mod de a pune toate mingile într-o singură urnă. Dacă înlocuim singura urnă N de capacitate n prin două urne N_1 de capacitate $n - 1$ și N' de capacitate 1, atunci una dintre mingi trebuie scoasă din N și introdusă în N'. Restul de $n - 1$ mingi se pun în N_1. Mingea din N' poate fi arbitrară și, deoarece mingile sînt două cîte două diferite, avem n posibilități. Prin urmare, găsim

$$\{n - 1, 1\}_n = n.$$

În mod analog se dovedește

$$a\{a, b, c, ...\}_n = \{a - 1, 1, b, c, ...\}_n. \tag{12}$$

În acest caz urnele $B, C, ...$ de capacitate $b, c, ...$ sînt lăsate neschimbate, dar urna A de capacitate a este înlocuită prin două urne A_1 de capacitate $a - 1$ și A' de capacitate 1. Putem trece de la o distribuție între $A, B, C, ...$ la o distribuție între $A_1, A', B, C, ...$ luînd o minge arbi-

trară din A pentru A' și punînd restul de $a-1$ mingi din A în A_1; mingile din $B, C, \ldots$ le lăsăm neschimbate. Din nou, deoarece mingile sînt toate diferite, există a posibilități diferite de a alege o minge pentru A' din A. Prin urmare, numărul de distribuții în urnele $A_1A', B,C,\ldots$ este de a ori mai mare decît numărul de distribuții în urnele $A,B,C,\ldots$

Acum putem înlocui A_1 prin două urne, A_2, de capacitate $a-2$ și A'', de capacitate 1, și vom avea evident

$$(a-1)\{a-1,1,\ b,\ c,\ \ldots\}_n = \{a-2,\ 1,\ 1,\ b,\ c,\ \ldots\}_n.$$

În același mod găsim

$$(a-2)\{a-2,\ 1,\ 1,\ b,\ c,\ \ldots.\}_n = \{a-3,\ 1,\ 1,\ 1,\ b,\ c,\ldots\}_n$$

și o serie întreagă de egalități asemănătoare, dintre care ultima este

$$2\{2,\ \underbrace{1,1,\ \ldots,\ 1}_{a-2},\ b,\ c,\ \ldots\}_n = \{\underbrace{1,\ 1,\ldots,\ 1}_{a},\ b,\ c,\ \ldots\}_n.$$

În acest ultim pas am descompus pe a într-o serie de 1. Dacă înmulțim (12) și toate egalitățile care urmează între ele, atunci cele două părți obținute au factorii comuni

$$\{a-1,\ 1,\ b,\ c,\ \ldots\}_n,\ \{a-2,\ 1,\ 1,\ b,\ c,\ \ldots\}_n,\ \ldots,$$

$$\{2,\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{a-2},\ b,\ c,\ \ldots\}_n,$$

și aceștia pot fi simplificați fără a distruge egalitatea. Găsim astfel

$$a(a-1)\ (a-2)\ \ldots\ 2\{a,\ b,\ c,\ \ldots\}_n = \{\underbrace{1,1,\ \ldots,\ 1}_{a},\ b,\ c,\ldots\}_n.$$

În produsul $a\ (a-1)\ (a-2)\ \ldots\ 2$ vom interverti ordinea și vom folosi notația [1]

$$a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (a-1) \cdot a.$$

[1] $a!$ se citește „a factorial".

Rezultatul nostru poate fi scris deci sub forma

$$(13) \qquad a\,!\,\{a, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n.$$

Exact același proces poate fi aplicat pentru a înlocui urna B cu urne mai mici. Aceasta conduce la

$$b\,!\,\{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, \underbrace{1, \ldots 1}_{b}, c, \ldots\}_n.$$

care poate fi combinată cu (13) pentru a găsi

$$a\,!\,b\,!\,\{a, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a+b}, c, \ldots\}_n.$$

Tratînd pe C în mod asemănător și continuînd la fel cu celelalte urne, obținem în cele din urmă

$$(14) \qquad a\,!\,b\,!\,c\,!\,\ldots\{a, b, c, \ldots\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n,$$

unde evident simbolul din dreapta conține exact de n ori pe 1.

Dacă $a = n$ în (13), atunci avem o singură urnă și (13) devine

$$n\,!\,\{n\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n.$$

Prin urmare, ținînd seamă de (11), obținem

$$(15) \qquad n\,! = \{1, 1, \ldots, 1\}_n.$$

Folosind această valoare în (14), găsim formula

$$(16) \qquad \{a, b, c, \ldots\}_n = \{1, 1, \ldots, 1 \mid a, b, c, \ldots\}_n = \frac{n\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!\,\ldots}$$

pentru calculul simbolului nostru, cel puțin în toate cazurile considerate prin exemplele date.

9. Să revenim la exemplele considerate.

Exemplul I. Din (2) și (15) rezultă

$$P_n = \{1, 1, \ldots, 1 \mid 1, 1, \ldots, 1\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n = n\,!,$$

adică, n persoane pot fi distribuite în n locuri, în $n\,!$ moduri diferite sau există $n\,!$ permutări de n obiecte diferite.

Factorialele care apar în aceste formule cresc foarte repede. Primele zece sînt următoarele:

$1! = 1$	$6! = 720$
$2! = 2$	$7! = 5\,040$
$3! = 6$	$8! = 40\,320$
$4! = 24$	$9! = 362\,880$
$5! = 120$	$10! = 3\,628\,800$

Exemplul II. Din (3) și (16) rezultă

$$S = \frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}$$

pentru numărul de moduri în care cărțile pot fi distribuite în jocul *skat*. Acesta este un număr extrem de mare. Calculîndu-l găsim

$$S = 2\,753\,294\,408\,504\,640.$$

Cititorul se poate amuza făcînd calculele simulare pentru jocul de bridge.

Exemplul III. Făcînd uz de dualitatea (8) ca și de (5) și (16) obținem

$$P^{(n)}_{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!} \quad (a + b + c = n).$$

Calculîndu-le pentru $n = 4$, ele pot fi utilizate în (6) pentru a obține dezvoltarea

$$\begin{aligned}(x + y + z)^4 = {} & x^4 + y^4 + z^4 + \\ & + 4x^3y + 4x^3z + 4xy^3 + 4y^3z + 4xz^3 + \\ & + 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + \\ & + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2.\end{aligned}$$

Exemplul IV. În sfîrșit, (7) și (16) conduc la

$$C^k_n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pentru numărul de combinări de n obiecte luate cîte k.

IX

Asupra problemei lui Waring

Şirul pătratelor numerelor întregi 1, 4, 9, 16, 25, ... devine din ce în ce mai rar cu cît ne îndepărtăm. Lacunele între două pătrate consecutive devin din ce în ce mai mari. Deşi multe numere nu sînt pătrate perfecte, unele dintre ele sînt suma a două pătrate, de exemplu $13 = 9 + 4$, $41 = 25 + 16$ etc. Nu orice număr poate fi însă scris sub forma unei sume de două pătrate. Dacă vom căuta să exprimăm pe 6 ca o sumă de două pătrate, singurele pătrate mai mici decît 6 sînt 1 şi 4. Nici $1 + 1$, nici $4 + 4$, nici $1 + 4$ nu ne dau 6, astfel încît 6 necesită cel puţin trei pătrate. Într-adevăr, 6 poate fi exprimat ca o sumă de *trei* pătrate, $6 = 4 + 1 + 1$. Acelaşi procedeu arată că 7 nu se poate exprima ca o sumă de trei pătrate, ci numărul minim de pătrate necesare pentru 7 este *patru*, $7 = 4 + 1 + 1 + 1$. Pentru $8 = 4 + 4$ ajung numai două pătrate, 9 este el însuşi un pătrat şi avem $10 = 9 + 1$, $11 = 9 + 1 + 1$, $12 = 9 + 1 + 1 + 1 = 4 + 4 + 4$ etc.

Ar fi natural să ne aşteptăm că în curînd vom găsi un număr pentru care patru pătrate nu mai sînt de-ajuns şi, continuînd astfel, vom avea nevoie de un număr din ce în ce mai mare de pătrate. Fermat, care împreună cu Descartes se numără printre cei mai mari matematicieni ai secolului al XVII-lea, a arătat faptul, cu totul surprinzător, că orice număr pozitiv se poate exprima sub forma unei sume de cel mult patru pătrate.

Waring a emis ipoteza că o proprietate asemănătoare ar putea fi dovedită pentru cuburile numerelor întregi, pentru puterile de gradul 4 etc., şi a ridicat problema cît

de multe cuburi sînt necesare, cît de multe puteri de gradul 4 ș.a.m.d. Din această cauză numele său a fost asociat acestui cerc de probleme. Cuburile de numere întregi sînt 1, 8, 27, 64,... Dacă vom încerca să exprimăm numerele mai mici ca sume de cuburi, vedem că 7 fiind primul număr înaintea lui 8 trebuie exprimat numai cu ajutorul lui 1. Prin urmare, $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ necesită șapte cuburi, $15 = 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ opt cuburi, iar $23 = 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ nouă cuburi. Înainte de a ajunge la 31 apare un nou cub, 27, și întreaga situație se schimbă. Într-adevăr, $31 = 27 + 1 + 1 + 1 + 1$ necesită numai cinci cuburi.

C. G. Jacobi și Dahse au alcătuit lista primelor 12 000 de numere naturale, cu descompunerea fiecărui număr sub forma unei sume de cuburi cu numărul minim posibil de termeni. Această listă arată că după 23, următorul număr care necesită nouă cuburi este 239. Acesta a fost singurul număr de pe listă care a necesitat nouă cuburi. Numerele care au necesitat opt cuburi au fost 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 303, 364, 420, 428, 454; alte numere de acest fel nu au fost găsite pînă la 12 000. Există mai multe numere care necesită șapte cuburi, 7, 14, 21, 42, 47, 49, 61, 77, 85, 87, 103, ..., 5 306, 5 818, 8 042, dar chiar și acest șir are pînă la urmă un capăt. Continuînd această lucrare cu totul empirică s-au găsit confirmări ulterioare.

O astfel de lucrare empirică nu poate dovedi nimic. Ea servește numai la sugerarea ideii că este probabil adevărat că orice număr poate fi scris sub forma unei sume de cel mult nouă cuburi și că, probabil, orice număr, începînd de la un anumit număr, poate fi exprimat ca o sumă de cel mult opt cuburi sau probabil chiar șapte cuburi. Ultima afirmație că opt cuburi sînt suficiente începînd de la un anumit număr a fost demonstrată pentru prima oară de E. Landau, care a utilizat metode matematice dificile. După ce acest fapt a fost dovedit, Wieferich a demonstrat că orice număr poate fi scris sub forma unei sume de cel mult nouă cuburi.

Puterile următoare se comportă la fel ca și cuburile. Primele puteri de exponent 4 sînt 1, 16, 81, 256, ... Numărul 15 necesită 15 puteri de ordinul 4,31-16,47-17,63-18,

iar 79-19. După aceasta apare o nouă putere de gradul 4,81 și situația se schimbă complet. Problema care se pune este următoarea: sînt întotdeauna suficiente 19 puteri de ordinul 4? S-a lucrat extrem de mult la această problemă. Liouville a demonstrat că 53 de pătrate sînt suficiente și că acest număr poate fi coborît la 47, 45, 41, 39, 38. Wieferich a obținut 37. Rezultatele obținute erau însă mult mai mari decît 19.

Marele matematician german Hilbert a atacat problema generală într-un mod diferit. El nu a căutat să îmbunătățească rezultatele precedente, ci a considerat în schimb întregul cerc de probleme legat de cuburi, puteri de gradul 4 etc. El a izbutit să demonstreze că nu numai pentru cuburi și pentru puterile de gradul 4 este adevărat că putem descompune în sume numerele întregi, ci și pentru puterile de gradul 5, 6, și pentru orice grad mai mare este suficient un anumit număr de puteri (ca 9 și 37 pentru cuburi și puterile de gradul 4). Evident acest număr este cu atît mai mare cu cît crește exponentul.

Hardy și Littlewood, în Anglia, au folosit metode diferite și extrem de complicate pentru această problemă. Ei au arătat că toate numerele, începînd de la un anumit număr, pot fi scrise sub forma unei sume de 19 puteri de gradul 4. Acesta este numai unul dintre numeroasele rezultate profunde pe care le-au obținut. Am văzut că printre numerele mici cel puțin unul necesită 19 puteri. Hardy și Littlewood au dovedit că există un număr N, astfel încît toate numerele de la N încolo sînt sume de cel mult 19 puteri de gradul 4. Dar acest număr N, așa cum reiese din demonstrația lor, este atît de mare, încît ei nu s-au preocupat să-i calculeze valoarea. În esență, acest rezultat rezolvă cazul puterilor de gradul 4 deoarece tot ceea ce ne-ar mai rămîne de făcut este să studiem sistematic toate numerele inferioare lui N, pentru a determina dacă 19 puteri de gradul 4 sînt suficiente pentru *orice* număr. Totuși acest număr N este atît de enorm, încît un asemenea studiu ar depăși abilitatea oricărui calculator.

Am consacrat un spațiu considerabil *faptelor* legate de această problemă. Această discuție folosește pentru formarea unei idei asupra modului în care studiul empiric

poate fi utilizat la descoperirea unor noi fapte și la demonstrarea unor teoreme noi. Vom încerca să dăm o idee despre *metodele* legate de această problemă, în special despre acelea folosite de Hilbert. Din nefericire, metodele puternice ale lui Hardy și Littlewood sînt mult prea avansate și complicate pentru a fi expuse. Chiar demonstrațiile pe care le vom menționa depășesc în parte limitele discuției noastre, dar este totuși posibil să înfățișăm ideile utilizate.

Ca de obicei, pornim de la un caz simplu. Egalitatea $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ este cunoscută din algebră. Pentru cine a uitat-o, ea poate fi verificată cu ușurință, făcînd înmulțirea din stînga. Această egalitate este adevărată pentru oricare două numere a și b. O egalitate care este întotdeauna adevărată se numește o „identitate". O identitate puțin mai complicată este

$$(1) \qquad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Pentru a o verifica amintim formula

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

și o folosim pentru înmulțirile din membrul drept. Obținem

$$(a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abdc + b^2c^2) =$$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd.$$

Ultimii doi termeni se reduc și restul poate fi grupat astfel: $a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, care este tocmai membrul stîng din relația (1).

Această identitate ne furnizează un rezultat destul de interesant: dacă două numere arbitrare sînt sume de două pătrate, atunci și produsul lor este, de asemenea, o sumă de două pătrate. De exemplu, $13 = 9 + 4$ și $41 = 25 + 16$ sînt amîndouă de această formă. Prin urmare, conform relației (1), găsim

$$533 = 13 \cdot 41 = (3^2 + 2^2)(5^2 + 4^2) = (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)^2 +$$
$$+ (3 \cdot 4 - 2 \cdot 5)^2 = 23^2 + 2^2,$$

și obținem numărul 533 ca o sumă de două pătrate. Formula (1) poate fi folosită în mod similar pentru oricare pereche de numere care sînt sume de două pătrate.

Euler, marele matematician elvețian din secolul al XVIII-lea, a descoperit următoarea identitate:

$$(2)\quad (a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = (-a_1b_1+ \\ +a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+ \\ +(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.$$

Această identitate poate fi verificată fără dificultate făcînd calculele din ambele părți după formula cunoscută

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+ \\ +2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

Formula (2) este asemănătoare cu (1), deoarece ea arată că dacă două numere pot fi puse fiecare sub forma unei sume de patru pătrate, atunci și produsul lor este o sumă de patru pătrate. Lagrange a folosit această identitate într-o demonstrație extrem de frumoasă a teoremei lui Fermat, după care orice număr întreg poate fi descompus într-o sumă de cel mult patru pătrate. În primul rînd această observație arată că este suficient să arătăm doar că orice număr prim este o sumă de cel mult patru pătrate, deoarece ea va fi apoi adevărată și pentru orice număr compus. Pentru a studia numerele prime Lagrange folosește din nou formula (2). Pentru moment considerăm teorema lui Fermat demonstrată și vom face uz de ea. Demonstrația lui Lagrange va fi dată la sfîrșitul acestui capitol.

Această teoremă a fost folosită de J. Liouville la demonstrarea faptului că orice număr este o sumă de cel mult 53 de puteri de gradul 4. El face, de asemenea, uz de identitatea

$$(3)\quad 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = (x_1+x_2)^4+(x_1+x_3)^4+ \\ +(x_1+x_4)^4+(x_2+x_3)^4+(x_2+x_4)^4+(x_3+x_4)^4+ \\ +(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_1-x_4)^4+ \\ +(x_2-x_3)^4+(x_2-x_4)^4+(x_3-x_4)^4.$$

Pentru a verifica această identitate vom folosi formula binomului pentru a calcula

$$(x_1+x_2)^4 = x_1^4+4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4$$

și

$$(x_1 - x_2)^4 = x_1^4 - 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3 + x_2^4.$$

Adunîndu-le, obținem

$$(x_1 + x_2)^4 + (x_1 - x_2)^4 = 2x_1^4 + 2x_2^4 + 12x_1^2x_2^2.$$

Folosind formula binomului pentru fiecare pereche de paranteze scrise una sub alta din membrul drept al relației (3) găsim că acesta are expresia

$$6(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) +$$

$$+ 12(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2).$$

Calculînd apoi și membrul stîng al formulei (3), se obține aceeași expresie.

Liouville a făcut uz de această identitate în modul următor: Fie n un număr întreg pozitiv. Trebuie să dovedim că n este o sumă de cel mult 53 de puteri de gradul 4. Începem prin a împărți pe n cu 6, găsind cîtul și restul, $n = 6x + y$ (dacă n este 29, cîtul x este 4, iar restul y este 5). Aici y va fi unul dintre numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5. Apoi Liouville folosește teorema lui Fermat. Bazîndu-se pe ea, el scrie numărul x sub forma unei sume de patru pătrate, $x = a^2+b^2+c^2+d^2$. Numărul inițial poate fi scris deci sub forma

$$n = 6x + y = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + y =$$
$$= 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2 + y.$$

În continuare Liouville aplică din nou teorema lui Fermat numerelor a, b, c, d, pentru a obține

$$a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2,$$

$$b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2,$$

$$c = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2,$$

$$d = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

și, prin urmare,

$$n = 6(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + \ldots +$$

$$+ 6\,(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2) + y.$$

Identitatea (3) poate fi acum utilizată. Aplicată primei expresii din dreapta, ea arată ca această expresie poate fi scrisă sub forma unei sume de 12 puteri de gradul 4. Același lucru este adevărat pentru fiecare din cele trei expresii asemănătoare. Așadar găsim $4 \cdot 12 = 48$ puteri de gradul 4 și mai rămîne să descompunem pe y în puteri de gradul 4. Deoarece y este 0, 1, 2, 3, 4 sau 5, el poate fi descompus într-o sumă de cel mult cinci puteri de gradul 4, fiecare egală cu 1. Aceasta ne dă în total $48 + 5 = 53$ puteri de gradul 4.

Teorema lui Lagrange stabilește că orice număr pozitiv N este o sumă de patru pătrate de numere întregi, $N = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$. Demonstrînd această teoremă, vom face uz de formula (2) din acest capitol, schimbînd însă literele. Dacă luăm $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$, $a_3 = x_3$, $a_4 = x_4$, $b_1 = -y_1$, $b_2 = y_2$, $b_3 = y_3$, $b_4 = y_4$, găsim

$$(2') \qquad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 +$$

$$+ (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 +$$

$$+ (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 +$$

$$+ (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2.$$

Demonstrația se poate descompune într-un număr de pași. Vom demonstra întîi:

Teorema 1. *Dacă A și B se descompun sub forma unei sume de patru pătrate, atunci și produsul AB este o sumă de patru pătrate.* Aceasta rezultă direct din (2). Dacă $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ și $B = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, atunci conform (2) AB este o sumă de patru pătrate, dintre care fiecare este evident un număr întreg. Acest rezultat ne permite să ne concentrăm atenția asupra numerelor prime, deoarece el arată că putem considera

numai factorii în care se descompun numerele. Nu vom căuta să dovedim imediat rezultatul relativ la numerele prime, ci vom începe cu:

Teorema 2. *Dacă p este un număr prim mai mare decît 2, atunci este posibil să găsim un număr m astfel încît $1 \leqslant m < p$ și mp să fie scris sub forma unei sume de patru pătrate, $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.* Acest fapt este banal dacă nu insistăm asupra inegalității $1 \leqslant m < p$, deoarece am putea scrie $0 \cdot p = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ sau $p \cdot p = p^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$. Inegalitatea $1 \leqslant m < p$ este totuși importantă pentru mai tîrziu.

Pentru a demonstra teorema 2, observăm mai întîi că p este un număr impar, deoarece este prim și mai mare ca 2. Considerăm numerele $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Împărțindu-le pe fiecare la p, și luînd numai resturile, obținem $\frac{p+1}{2}$ numere r, fiecare cuprins între 0 și $p - 1$. Pentru $p = 11$ avem 0, 1, 4, 9, 16, 25. Împărțind pe fiecare la 11, găsim că resturile r sînt 0, 1, 4, 9, 5, 3. În fiecare caz, aceste resturi sînt două cîte două diferite. Dacă două ar fi egale, am avea două numere întregi $x_1 > x_2$, cuprinse între 0 și $\frac{p-1}{2}$, ale căror pătrate ne-ar furniza același rest r la împărțirea cu p. Cu alte cuvinte, am avea $x_1^2 = q_1 p + r$ și $x_2^2 = q_2 p + r$. Scăzîndu-le, am obține $x_1^2 - x_2^2 = (q_1 - q_2)p$, sau $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (q_1 - q_2)p$. Deoarece p este prim el trebuie să dividă pe $x_1 - x_2$ sau pe $x_1 + x_2$, dar acest fapt este imposibil, deoarece $x_1 - x_2$ și $x_1 + x_2$ sînt numere pozitive mai mici decît p.

Considerăm acum resturile r mărite cu 1 pe care le scădem din p. Obținem din nou $\frac{p+1}{2}$ numere s, cuprinse între 0 și $p - 1$, diferite două cîte două. Pentru $p = 11$ obținem 10, 9, 6, 1, 5, 7. Cel puțin unul dintre aceste numere s trebuie să fie egal cu un număr r dintre numerele precedente, deoarece acestea sînt $\frac{p+1}{2}$ dintre cele p numere $0, 1, 2, \ldots, p - 1$, lăsînd disponibile numai $\frac{p-1}{2}$

numere, iar numerele s sînt în număr de $\frac{p+1}{2}$. Pentru $p = 11$ găsim 1, 9, 5 atît printre numerele r, cît și printre numerele s.

Fie $R = S$ numere egale dintre numerele r și s. R este un rest al împărțirii unui număr x^2 cu p, unde $0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$. S se obține împărțind cu p un număr y^2, pentru care $0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2}$, mărind restul cu 1 și scăzîndu-l apoi din p. Adică $x^2 = q_1 p + R$, $y^2 = q_2 p + r$, $S = p - (r+1)$. Adunînd aceste ecuații, obținem $x^2 + y^2 + S = (q_1 + q_2 + 1)\, p + R - 1$. Deoarece $R = S$, putem scrie această expresie sub forma $x^2 + y^2 + 1 = mp$, unde $m = q_1 + q_2 + 1$. De asemenea, întrucît $0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$ și $0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2}$, avem $0 < mp \leqslant \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{p^2 - 2p + 1}{2} + 1 = \frac{p^2 - 2p + 3}{2} < \frac{p^2}{2} < p^2$ și, prin urmare, $0 < m < p$. Aceasta demonstrează teorema 2, deoarece avem $1 \leqslant m < p$ și $mp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2$.

Pentru $p = 11$ luînd $R = S = 5$, găsim $x = 4$, $y = 4$, $4^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2 = 3 \cdot 11$. Dacă însă luăm $R = S = 1$, găsim $x = 1$, $y = 3$, $1^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \cdot 11$. Astfel am reușit să scriem $p = 11$ sub forma unei sume de patru pătrate. Metoda întrebuințată nu ne dă întotdeauna numărul p ca sumă de patru pătrate. Putem însă demonstra

Teorema 3. *Dacă p este un număr prim mai mare decît 2 și dacă m este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care mp este o sumă de patru pătrate, atunci $m = 1$.*

Avem $m < p$, conform teoremei 2. Acest număr m nu poate să fie par, pentru că dacă ar fi par am avea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp$, egal cu un număr par. În acest caz, sau toate numerele x ar fi pare, sau două ar fi pare și două impare, sau toate ar fi impare. În cazul al doilea, putem presupune că am numărat x-ii astfel încît x_1 și x_2 sînt pare, iar x_3 și x_4 sînt impare. În acest caz, oricum s-ar

prezenta lucrurile numerele $(x_1 + x_2)$, $(x_1 - x_2)$, $(x_3 + x_4)$ și $(x_3 - x_4)$ sînt toate pare. Vom avea deci:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=\frac{m}{2}p$$

și toate numerele ridicate la pătrat din membrul stîng sînt întregi. Adică $\frac{m}{2}p$ poate fi scris sub forma unei sume de patru pătrate și prin urmare m nu ar fi cea mai mică valoare presupusă.

Știm acum că m este impar și $m < p$. Pentru a demonstra că $m = 1$, presupunem că $m > 1$ și vom arăta că și de data aceasta numărul poate fi micșorat. Deoarece m este impar, putem presupune $m \geqslant 3$. În acest caz avem

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \tag{4}$$

Împărțind pe fiecare x_k prin m obținem resturile r_k, $0 \leqslant r_k < m$. Dacă $0 \leqslant r_k \leqslant \frac{m-1}{2}$, vom scrie $y_k = r_k$. Dacă $\frac{m+1}{2} \leqslant r_k \leqslant m-1$, vom scrie $y_k = r_k - m$. În ambele cazuri vom avea $x_k = q_k m + y_k$ și $-\frac{m-1}{2} \leqslant y_k \leqslant \frac{m-1}{2}$. Deoarece $y_k = x_k - q_k m$, avem, de asemenea, folosind (4),

$$\begin{aligned} y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2- \\ &-2m(x_1q_1+x_2q_2+x_3q_3+x_4q_4)+ \\ &+m^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)=mp-2m(x_1q_1+ \\ &+x_2q_2+x_3q_3+x_4q_4)+m^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)=mn, \end{aligned} \tag{5}$$

unde n este un număr întreg. Prin urmare, vom avea $n > 0$, deoarece dacă $n = 0$, atunci $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$. Aceasta ar însemna că fiecare x este multiplu de n și, prin urmare, fiecare x^2 este multiplu de m^2. Din (4) vedem

atunci că mp este multiplu de m^2, astfel încît p este multiplu de m^2. Dar acest fapt nu poate fi adevărat, deoarece p este prim și $1 < m < p$. De asemenea, avem $mn = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqslant 4\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 < m^2$ și deci $n < m$.

Înmulțind (4) și (5) găsim

(6) $m^2np = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) =$

= membrul drept din (2'). Primul număr al cărui pătrat apare în membrul drept al formulei (2') este

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = x_1(x_1 - q_1m) +$$

$$+ x_2(x_2 - q_2m) + x_3(x_3 - q_3m) + x_4(x_4 - q_4m) =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) =$$

$$= mp - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) = mz_1,$$

unde z_1 este un număr întreg. Următorul număr al cărui pătrat apare în membrul drept al formulei (2') este

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 =$$

$$= x_1(x_2 - q_2m) - x_2(x_1 - q_1m) + x_3(x_4 - q_4m) -$$

$$- x_4(x_3 - q_3m) = m(-x_1q_2 + x_2q_1 - x_3q_4 + x_4q_3) = mz_2,$$

unde z_2 este un număr întreg. În mod asemănător se arată că al treilea și al patrulea număr sînt de forma mz_3 și mz_4. Introducînd aceste expresii în (6) avem

$$m^2np = m^2z_1^2 + m^2z_2^2 + m^2z_3^2 + m^2z_4^2,$$

$$np = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Prin urmare, np poate fi scris ca sumă de patru pătrate și avem $0 < n < m$. Rezultă deci că $m > 1$ nu a fost cea mai mică valoare presupusă. Prin urmare, singurul caz care mai rămîne este $m = 1$, și teorema 3 este demonstrată.

Pentru cazul $p = 11$, $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $m = 3$ avem $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$; $4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3z_1$, $z_1 = 3$; $4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 3z_2$, $z_2 = 0$; $4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 3z_3$, $z_3 = 1$;

$4 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3z_4$, $z_4 = 1$ și, în sfîrșit, $3^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 1 \cdot 11$, $n = 1$.

Teorema 4. *Dacă p este un număr prim, atunci el poate fi scris ca o sumă de patru pătrate.* Aceasta nu este altceva decît o, parafrazare a teoremei 3. Ea este adevărată dacă $p = 2$, deoarece avem $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$. Dacă $p > 2$ afirmația este adevărată conform teoremei 3.

Ajungem acum la teorema lui Lagrange.

Teorema 5. *Orice număr întreg $n \geqslant 0$ poate fi scris ca o sumă de patru pătrate.* Teorema este adevărată pentru $n = 0$ și $n = 1$, deoarece avem $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ și $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$. Ea este de asemenea adevărată dacă n este un număr prim, conform teoremei 4. Rămîn numai numerele compuse. Dacă n este compus îl putem descompune într-un produs de factori primi $n = p_1p_2p_3 \ldots p_t$, unde $p_1p_2p_3, \ldots, p_t$ sînt numere prime nu neapărat distincte. Conform teoremei 4, p_1 și p_2 pot fi scrise sub forma unei sume de patru pătrate. Conform teoremei 1, produsul p_1p_2 poate fi de asemenea descompus sub forma unei sume de patru pătrate. Aplicînd din nou teorema 4, p_3 poate fi scris ca o sumă de patru pătrate. Aplicînd teorema 1, același lucru rezultă pentru produsul $p_1p_2p_3$. Continuînd în acest fel, găsim în cele din urmă că n poate fi scris ca sumă de patru pătrate.

X

Curbe închise care se autointersectează

1. Curbele de care ne vom ocupa în acest capitol sînt de tip particular. Deși aceste curbe pot fi destul de complicate, ele trebuie să îndeplinească anumite condiții. Întîi trebuie să poată fi trasate cu o singură linie. Cu alte cuvinte, trebuie să putem desena întreaga curbă dintr-o singură trăsătură, pornind dintr-un anumit punct, fără să ridicăm creionul de pe hîrtie, pînă cînd curba este complet trasată. În al doilea rînd, ele trebuie să fie închise. Aceasta înseamnă că atunci cînd desenăm curba putem porni dintr-un punct dat pentru a trasa întreaga curbă, revenind în punctul de plecare, după ce curba este desenată complet. În sfîrșit, curbele considerate se pot autointersecta de un număr arbitrar de ori, dar orice punct de intersecție poate fi parcurs numai de două ori. Exemplele considerate în fig. 26 și fig. 27 satisfac aceste condiții, pe cînd exemplul din fig. 28 nu. Tipul de intersecție îngăduit (fig. 26 și fig. 27) se numește punct dublu. Intersecția din fig. 28 nu este admisă, ea se numește punct triplu [1].

La o trasare completă a curbei este evident că fiecare punct dublu este parcurs de două ori. Indicînd fiecare

[1] Deși materialul prezentat aici are multe legături cu capitolul II, ideile fundamentale sînt esențial diferite, și cititorul trebuie să considere aceste capitole ca independente. În capitolul II s-a dat o rețea de curbe și s-a analizat modul în care ea poate fi străbătută. De data aceasta curba dată este un drum închis, dar nu se pune problema cum poate fi parcurs. De asemenea, în termenii din capitolul II curbele considerate aici au numai intersecții de ordinul 4, numite în cazul de față puncte duble. În sfîrșit, într-un punct dublu nu avem posibilitatea de a discuta în ce mod pot fi legate ramurile curbei; cele patru ramuri care pornesc dintr-un punct dublu sînt unite în două perechi de părți opuse, deoarece se presupune că avem un punct de autointersecție al curbei.

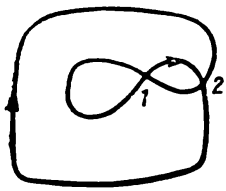


Fig. 26

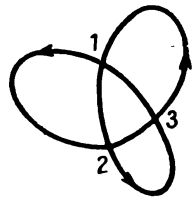


Fig. 27

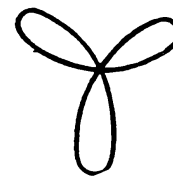


Fig. 28

punct dublu printr-un număr, printr-un șir de numere, putem arăta ordinea în care sînt parcurse punctele duble. De exemplu, fig. 26 are șirul de parcurgere 1 2 2 1, pe cînd fig. 26 are 1 2 3 1 2 3. Întrucît fiecare punct dublu este parcurs de două ori, orice număr trebuie să apară de două ori în șir. Gauss a observat că nu este adevărat că orice șir în care fiecare termen apare de două ori reprezintă ordinea de parcurgere a punctelor duble de pe o curbă. În cazul punctelor duble considerate de noi am întîlnit ordinea 1 2 2 1, dar nu există nici o curbă cu ordinea 1 2 1 2. Acest lucru poate fi verificat prin încercări.

Principalul rezultat al acestui capitol va fi teorema că *într-un asemenea șir orice punct dublu apare o dată într-o poziție de indice par și o dată într-o poziție de indice impar.* Cu alte cuvinte, se afirmă că cele două poziții ocupate de un punct dublu sînt separate de un număr par de poziții, dacă nu sînt alăturate. Din această teoremă rezultă imediat că 1 2 1 2 nu este un șir posibil de poziții de pe o curbă, deoarece numerele 1 și 1 sînt despărțite de o *singură* poziție.

2. Pentru a demonstra teorema, considerăm un punct dublu Q arbitrar al curbei A (fig. 29). Dacă pornim din Q și descriem curba, ne vom întoarce la un anumit moment în Q. Cînd ne întoarcem prima dată în Q am traversat o anumită parte B a întregii curbe A. Această parte constituie *numai* o porțiune din întreaga curbă, întrucît există *patru* ramuri ale curbei care pornesc din Q și noi am traversat

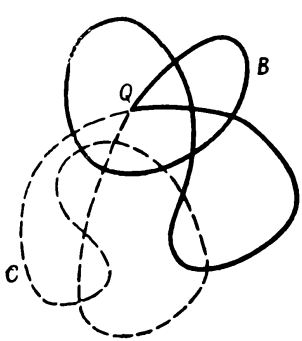


Fig. 29

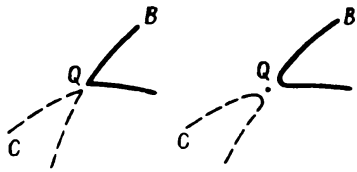


Fig. 30

numai *două*, prima dată cînd am pornit din Q, și a doua oară cînd ne-am întors. Continuînd să descriem curba din Q, vom parcurge restul curbei A, pe care îl notăm cu C. Atît B cît și C sînt curbe închise, fiecare avînd un colț în Q. Deși Q este un punct dublu al lui A, el nu este punct dublu pentru B și nici pentru C (nici una dintre curbele B și C nu au autointersecții în acest punct, iar B și C se întîlnesc dar nu se întretaie în Q. Trebuie să demonstrăm că parcurgînd pe B, de la Q înapoi la Q, trecem prin punctele duble de un număr par de ori [1]. Punctele duble ale lui A situate pe B sînt în afară de Q, punctele în care B se autointersectează (punctele duble ale lui B) și punctele în care B și C se intersectează.

Parcurgînd B, trecem prin fiecare punct dublu al lui B de două ori. Prin urmare, toate aceste puncte duble contribuie cu un număr par în calculul nostru. La fiecare intersecție al lui B cu C trec două ramuri, una a lui B și alta a lui C. Parcurgînd pe B nu intrăm niciodată în ramura corespunzătoare a lui C, astfel încît trecem prin fiecare intersecție a lui B și C o singură dată. Rămîne să arătăm doar că B și C se intersectează într-un număr par de puncte.

3. Fără a schimba punctele de intersecție ale lui B și C, putem deforma ușor curbele în vecinătatea lui Q în așa fel încît să le separăm (fig. 30). Cele două curbe se pot acum intersecta în diferite alte puncte, dar nu se pot întîlni nicăieri fără să se întretaie.

Trebuie să arătăm acum că două curbe de acest fel sau nu se intersectează de loc sau se intersectează într-un număr par de puncte. Pentru a arăta acest lucru, vom deforma treptat una dintre curbe, să spunem curba C. La fiecare pas vom îndepărta un punct dublu al lui C simplificînd astfel situația. Ca și în punctul Q, vom deforma

[1] Un număr par de *ori*, nu de puncte duble. În fig. 26, cu ordinea de parcurgere 1 2 2 1, trecem printr-un *singur* punct 2 între 1 și 1, dar trecem prin el de două ori.

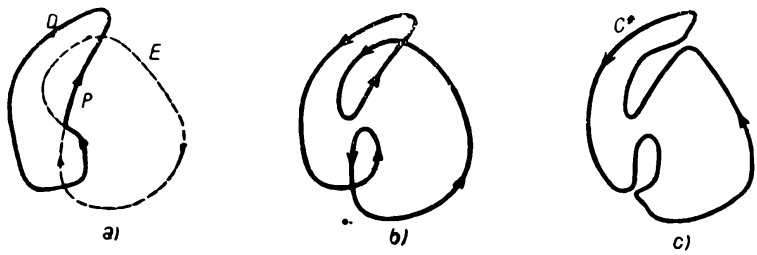


Fig. 31

curba atît de puțin, încît să nu modificăm intersecțiile dintre B și C.

Fie P un punct dublu al lui C. Curba C se descompune în două curbe închise D și E în P în același mod în care A se descompune în B și C în Q. Curbele D și E se întîlnesc în P. Dacă alegem pe C sensul în care o parcurgem, atunci D și E vor fi în mod implicit dotate cu un sens (fig. 31 a). Acum pornind din P, parcurgem pe D în direcția indicată, revenind în P, și apoi parcurgem pe E înapoi în P, în sens opus sensului marcat. Folosind sensul opus de pe E am eliminat întretăierea din P. Am parcurs C o singură dată, trecînd prin P de două ori, în lungul a două drumuri care au colțuri comune în P, dar care nu se întretaie în acest punct. Aceste două drumuri se ating numai în P, astfel încît putem să le separăm rotunjind colțurile. Am înlocuit astfel C cu o curbă care nu mai are punct dublu în P (fig. 31 b). Noua curbă are un punct dublu mai puțin decît curba inițială C. Dacă deformăm curba în vecinătatea lui P trebuie să facem astfel încît nici un alt punct dublu al lui C și nici o intersecție a lui B cu C să nu se modifice.

Repetînd acest procedeu pentru fiecare punct dublu al lui C, ajungem în cele din urmă la o curbă C^* fără puncte duble (fig. 31 c). Cele două curbe C și C^* sînt aproape aceleași. Ele diferă numai în vecinătatea punctelor duble ale lui C. Pentru noi este important faptul că cele două curbe intersectează pe B în aceleași puncte.

4. O curbă închisă fără puncte duble închide o regiune din plan pe care o numim interiorul curbei. Acest fapt este evident și îl acceptăm ca fapt intuitiv. Partea planului care nu este pe curbă și nici în interiorul său este în „exterior", și este despărțită de interior prin curba însăși.

Dacă o astfel de curbă este tăiată de altă curbă într-un punct, atunci a doua curbă trebuie să treacă în acel punct din interior în exterior ori viceversa.

Putem arăta acum că B și C sau nu se intersectează, sau se intersectează într-un număr par de puncte. Fără a modifica intersecțiile, putem înlocui pe C prin C^*, care nu are puncte duble. Se poate întîmpla ca B să fie în întregime cuprinsă în interiorul lui C^*, în care caz nu avem intersecții. Dacă B se află în întregime în exteriorul lui C^*, atunci din nou nu există intersecții. În sfîrșit, o parte din B se poate afla în interiorul lui C^* și o altă parte în exterior. În acest caz, fie T un punct pe B în exteriorul lui C^*. Dacă pornim să străbatem din T curba B, atunci trebuie să existe un prim moment în care pătrundem în interiorul lui C^*. Acesta este un punct de intersecție al lui B cu C^*. Deoarece B este închisă, trebuie să ajungem în cele din urmă înapoi la T, în exteriorul lui C^*; aceasta înseamnă că trebuie să trecem din interior în exterior, adică să străbatem o a doua intersecție. Se poate întîmpla ca B să pătrundă în interior de mai multe ori, dar de fiecare dată cînd B pătrunde în interior trebuie să existe un moment cînd B iese din interior, deoarece în cele din urmă B se întoarce în punctul de plecare T, situat în exterior. Prin urmare, C^* și B (și deci C și B) sau se intersectează într-un număr par de puncte, sau nu se intersectează de loc. După cum am văzut la sfîrșitul § 2, aceasta este de ajuns pentru a încheia demonstrația.

5. Această teoremă, care afirmă că fiecare punct dublu al lui A apare o dată într-o poziție pară și o dată într-o poziție impară, poate fi exprimată într-un mod întrucîtva diferit. Vom concepe pe A ca fiind proiecția unei curbe din spațiu, astfel încît punctele duble ale lui A reprezintă pozițiile în care o parte a curbei trece deasupra sau sub o altă parte a ei. Dacă A ar fi o șosea în care intersecțiile au fost eliminate prin înlocuirea cu ramuri suprapuse, punctele duble ar reprezenta suprapunerile. Urmărim acum să aranjăm curba astfel încît, parcurgînd-o, să străbatem alternativ partea superioară și partea inferioară a fiecărei suprapuneri. Dacă pornim din partea superioară a unei suprapuneri și traversăm curba, atunci vom trece prin partea inferioară a primei suprapuneri,

apoi prin partea superioară a următoarei etc. Astfel întregul aranjament este complet determinat. Singura problemă este dacă ne putem aranja într-adevăr în acest mod. Pentru că la un anumit moment ne vom întoarce într-o suprapunere (un punct dublu al lui A) pe care am mai străbătut-o o dată. Se poate întîmpla ca inițial să fi străbătut partea superioară a suprapunerii și apoi să străbatem din nou partea superioară? Nu, deoarece teorema noastră afirmă precis că o astfel de situație nu se poate întîmpla. Conform ei, trebuie să trecem prin punctele duble ale lui A de un număr par de ori înainte de a ne întoarce în punctul dublu considerat. Dacă am pornit din parte superioară a unei suprapuneri, vom trece pe sub cea de-a doua, pe deasupra celei de-a treia..., pe deasupra ultimului (din cauza parității numărului de ori). Prin urmare, înapoindu-ne la suprapunerea inițială, vom trece pe dedesubt, și aceasta este tocmai calea rămasă liberă.

Fig. 32 și 33 arată curbele din fig. 26 și 27 desenate în acest mod ca proiecții de curbe spațiale. În fiecare punct dublu ele arată ce parte a curbei trece pe deasupra celeilalte. Aceste curbe spațiale sînt „noduri". Un nod de acest fel, în care trecem alternativ pe deasupra și pe dedesubt la traversări, se numește un nod „alternant". Strict vorbind, fig. 32 nu este propriu-zis un nod, deoarece un lat de sfoară răsucit în această formă ar putea fi desfăcut într-un cerc neînnodat. Fig. 33 reprezintă însă un nod propriu-zis. El nu poate fi transformat într-un cerc fără a-l tăia. Fig. 34 arată că nu toate nodurile sînt alternante, cel puțin dacă nu sînt deformate într-un anumit mod. Faptul că există noduri nealternante arată mult mai clar că teorema noastră, în oricare dintre formulările sale, este cu siguranță nebanală.

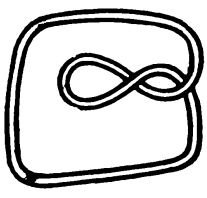


Fig. 32

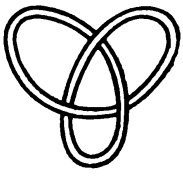


Fig. 33

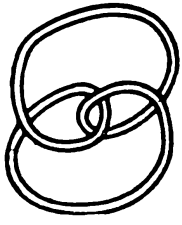


Fig. 34

XI

Este unică descompunerea unui număr în factori primi?

1. Avînd un număr întreg arbitrar dat, putem să-descompunem în factori pînă cînd ajungem la o descompunere a sa care conține numai factori primi. De exemplu, 60 poate fi descompus în $6 \cdot 10$, 6 se descompune în $2 \cdot 3$, iar 10 în $2 \cdot 5$, astfel încît obținem în cele din urmă

$$60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5,$$

unde toți factorii sînt primi.

Putem, de asemenea, descompune pe 60 mai întîi sub forma $60 = 4 \cdot 15$, $4 = 2 \cdot 2$, $15 = 3 \cdot 5$, de unde rezultă

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Se observă că apar aceleași numere prime în ambele descompuneri și fiecare număr prim apare de același număr de ori. Scriind numerele prime în ordinea mărimii, avem:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

în ambele cazuri. Faptul că găsim același rezultat și într-un caz și în celălalt ni se pare cu totul evident, deoarece sîntem obișnuiți cu el. În aritmetică am învățat că dacă se descompune un număr în factori primi în diferite moduri, se obțin întotdeauna aceiași factori, indiferent de modul în care se face descompunerea.

Afirmația este adevărată, dar este ea într-adevăr atît de evidentă? Să considerăm un număr mai mare. Este destul de dificil să descompunem numărul 30 031. După mai multe încercări am putea găsi că se descompune în $59 \cdot 509$ și că acești factori sînt primi. Pe ce bază putem

afirma fără îndoială că oricum am proceda ajungem la același rezultat?

O asemenea întrebare se opune tuturor ideilor învățate despre numerele prime „cuprinse" într-un număr. Scopul § 2 și § 3 este de a arăta că aceste idei intuitive nu sînt întemeiate. Astfel, după ce vom fi arătat că problema noastră este îndreptățită, vom consacra restul capitolului demonstrării faptului că *descompunerea în factori primi este unică.*

2. Pentru a ne elibera de ideile preconcepute, vom considera un sistem neobișnuit de numere. Acestea sînt numerele de forma $a + b\sqrt{6}$, unde a și b sînt numere întregi, obișnuite. De exemplu, $12 + 5\sqrt{6}$, $\sqrt{6} - 2$ și $3\sqrt{6}$ sînt astfel de numere, iar $2 + 3\sqrt{12}$ nu este. Numerele întregi obișnuite nu sînt excluse; într-adevăr, ele se obțin făcînd $b = 0$. Ele constituie o parte din sistemul nostru de numere, astfel încît acest nou sistem este o extindere a mulțimii numerelor întregi ordinare.

Calculele cu aceste numere se fac în mod natural. Procedeul rezultă în mod familiar din algebră. Modul de a aduna ori de a scădea două asemenea numere este clar după exemplul

$$(3 + \sqrt{6}) + (5 + \sqrt{6}) = 8 + 2\sqrt{6}.$$

Operațiile de mai jos, efectuate după regulile obișnuite ale algebrei, vor arăta cum se înmulțesc aceste numere:

$$(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) = 9 - 6 = 3$$

$$(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2) = 6 - 4 = 2$$

$$(3 + \sqrt{6})(\sqrt{6} - 2) = 3\sqrt{6} - 6 + 6 - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$(3 - \sqrt{6})(\sqrt{6} + 2) = \sqrt{6}$$

$$(3 + \sqrt{6})(2 + \sqrt{6}) = 12 + 5\sqrt{6}$$

$$(3 - \sqrt{6})(\sqrt{6} - 2) = -12 + 5\sqrt{6}.$$

Nu este cazul să spunem nimic despre împărțirea acestor numere. Uneori un număr va divide pe altul, alteori nu, ca și în cazul numerelor întregi.

În sistemul de numere considerat, 6 poate fi descompus în $\sqrt{6}\,\sqrt{6}$ ca și în modul obișnuit

$$6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{6}\,\sqrt{6}. \tag{1}$$

În cazul de față 6 apare descompus în două moduri diferite. Aceasta ne face să ne amintim de întrebarea dacă 30 031 are descompuneri diferite de $59 \cdot 509$. Aparent (1) prezintă o situație similară.

Totuși, acest caz poate fi lămurit într-un mod foarte natural. Numerele 2 și 3 sînt numere prime obișnuite. Ele nu pot fi descompuse în produse de numere întregi obișnuite, dar pot fi descompuse în noul sistem de numere considerat. Într-adevăr, din înmulțirile precedente avem

$$2 = (\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2), \quad 3 = (3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}).$$

Prin urmare, continuînd descompunerea noastră $6 = 2 \cdot 3$, găsim

$$6 = (\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}). \tag{2}$$

Cele două descompuneri (1) coincid cu (2), în care factorii sînt grupați diferit. Prima dintre ele grupează primii doi factori și apoi ultimii doi. A doua grupează primul cu al patrulea factor și al doilea cu al treilea. Evident, există și alte grupări posibile. De exemplu, dacă grupăm primul factor cu al treilea și al doilea cu al patrulea, găsim

$$6 = (12 + 5\sqrt{6})(-12 + 5\sqrt{6}),$$

și această factorizare poate fi verificată prin înmulțire directă.

Cazul prezentat aici nu este deosebit de cele obișnuite. Studiindu-l, nu a fost nevoie să știm dacă factorii din (2) sînt primi. Prin număr prim vom înțelege evident un număr care nu poate fi descompus în sistemul nostru. De fapt nu ar fi greu să arătăm că cei patru factori sînt primi.

3. Să ne întoarcem la alt sistem de numere. Acest sistem este format din numerele de forma $a + b\sqrt{-6}$, unde a și b sînt întregi ordinari. În acest caz vom găsi din nou o situație asemănătoare cu (1), dar de această dată nu vom putea găsi o explicație ca aceea dată de (2).

Calculele se pot face în acest sistem tot așa de simplu ca și în sistemul $a + b\sqrt{6}$. Regulile algebrei se folosesc exact ca și mai înainte.

Corespunzător lui (1) avem în acest caz

$$6 = 2 \cdot 3 = -\sqrt{-6}\sqrt{-6}. \tag{3}$$

În analogie cu cazul de mai sus, vom căuta să descompunem 2, 3 și $\sqrt{-6}$. De astă dată se va dovedi totuși că acestea sînt numere prime în sistemul considerat, că ele nu pot fi descompuse.

În discuția noastră este convenabil să folosim noțiunea de „normă" a unui număr. Norma numărului $a + b\sqrt{-6}$ este produsul acestui număr cu $a - b\sqrt{-6}$.

$$N(a + b\sqrt{-6}) = (a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6}) = a^2 + 6b^2.$$

Cu alte cuvinte, în sistemul nostru norma unui număr este produsul acelui număr cu numărul obținut prin înlocuirea lui $\sqrt{-6}$ cu $-\sqrt{-6}$. Norma unui număr este întotdeauna un număr întreg pozitiv, obișnuit. Norma produsului a două numere este egală cu produsul normelor. Aceasta deoarece după regula de înmulțire avem

$$N(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6}) =$$

$$= [(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})][(a - b\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6})],$$

și acești patru factori pot fi reordonați pentru a da

$$(a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6}).$$

Grupîndu-i altfel, obținem tocmai

$$N(a + b\sqrt{-6})\,N(c + d\sqrt{-6}),$$

conform regulii.

Dacă 2 ar putea fi descompus în produsul a doi factori din sistemul nostru, am avea

$$2 = (a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6}),$$

și, prin urmare,

$$N(2) = N(a + b\sqrt{-6})\,N(c + d\sqrt{-6}).$$

Dar norma lui 2 este $N(2) = (2 + 0\sqrt{-6})(2 - 0\sqrt{-6}) = 2 \cdot 2 = 4$, astfel încît vom avea

$$4 = (a^2 + 6b^2)\ (c^2 + 6d^2),$$

de unde rezultă că numărul 4 s-ar descompune în produsul a doi întregi obișnuiți, fiecare de forma $x^2 + 6y^2$. Există numai două moduri în care 4 poate fi descompus cu ajutorul întregilor obișnuiți. Sau ambii factori sînt 2, sau unul este 4 și celălalt 1. Nici unul nu poate fi realizat în cazul de față, deoarece 2 nu poate fi exprimat sub forma $x^2 + 6y^2$, iar 1 este de această formă numai dacă luăm $x = 1$, $y = 0$. Prin urmare, singurul mod în care 2 poate fi descompus în produs de factori în sistemul nostru este acela în care unul din factori este $1 + 0\sqrt{-6} = 1$. Nu vom considera aceasta ca o descompunere propriu-zisă, după cum nu considerăm că $5 = 1 \cdot 5$ este o descompunere în factori n sistemul întregilor obișnuiți.

Exact în același mod se poate vedea că 3 și $\sqrt{-6}$ sînt prime în sistemul considerat. În locul normei 4, normele 9 și 6 ar trebui să se descompună în factori de forma $x^2 + 6y^2$.

Am demonstrat acum că (3) reprezintă două moduri diferite de descompunere în factori primi a numărului 6 în sistemul nostru. Dacă un asemenea lucru se poate întîmpla în acest sistem, atunci este cu siguranță nebanal faptul că el nu se întîmplă în sistemul întregilor obișnuiți. Dacă ar exista motive de a afirma că unicitatea descompunerii în factori primi este evidentă la întregii obișnuiți, atunci pentru aceleași motive am putea afirma că unicitatea descompunerii în factori primi este evidentă în orice sistem. Dar am găsit un sistem în care nu numai că nu este evidentă, ci nici nu este adevărată. Vom vedea că descompunerea în factori primi este unică în cazul numerelor întregi obișnuite, fapt care constituie însă o proprietate a acestui sistem. În cursul demonstrației vom face uz de proprietăți particulare ale numerelor întregi.

Este remarcabil că matematicienii greci au recunoscut această problemă și au simțit nevoia unei demonstrații numai din motive de ordin pur logic, aparent fără ajutorul

unui exemplu așa cum am procedat noi. Unicitatea descompunerii în factori primi este demonstrată în *Elementele* lui Euclid într-un mod diferit, fără a face uz de notațiile moderne. Atît enunțul, cît și demonstrația dată de Euclid acestei teoreme se deosebesc de cea pe care o vom da.

4. Numărul 30 este multiplu de 3. El este, de asemenea, multiplu de 5. Acest fapt se exprimă spunînd că 30 este „multiplu comun" de 3 și 5. În general, un multiplu comun a două numere este un număr care este simultan multiplu de fiecare dintre aceste numere. Oricare ar fi cele două numere, ele au întotdeauna un multiplu comun, deoarece dacă numerele sînt a și b, atunci produsul ab trebuie să fie un multiplu comun. Pentru 3 și 5 produsul $3 \cdot 5 = 15$ este un multiplu comun, ca și 30. Numărul 30 poate fi recunoscut ca multiplu comun al lui 3 și 5 prin faptul că el este dublul produsului lor, 15. În același mod este clar că orice multiplu de ab este multiplu comun al lui a și b. Prin urmare, două numere au întotdeauna o infinitate de multipli comuni.

Produsul ab și toți multiplii săi, împreună, nu ne dau neapărat toți multiplii comuni ai lui a și b. De exemplu, multiplii lui $10 \cdot 15$ sînt 150, 300, 450,..., pe cînd multiplii comuni ai lui 10 și 15 sînt 30, 60, 90, 120, 150, 180, ... Evident, 30 este cel mai mic număr care este multiplu comun al lui 10 și 15. Există întotdeauna un cel mai mic multiplu comun a două numere arbitrare a și b, întrucît este de ajuns să cercetăm toate numerele dintre 1 și ab pentru a hotărî care dintre ele este multiplu comun. Va exista întotdeauna cel puțin un multiplu comun, de exemplu ab. Între toți acești multipli va exista unul mai mic decît toți, numit *cel mai mic multiplu comun al lui a și b.*

Vom demonstra mai întîi

L e m a 1. *Orice multiplu comun a două numere este un multiplu al celui mai mic multiplu comun al acestora.*

Pentru $a = 10$, $b = 15$ lema afirmă că multiplii lui 30, adică 30, 60, 90,..., sînt toți multiplii comuni ai lui 10 și 15. Acest fapt poate fi verificat ușor, ca și orice alt caz particular. Totuși, trebuie să-l demonstrăm *în general.*

Demonstrația se bazează pe simplul fapt că diferența a doi multipli comuni ai lui a și b este, din nou, un multiplu

comun al lui a și b. Aceasta, deoarece diferența a doi multipli de a este de asemenea un multiplu de a; acest fapt a fost utilizat și discutat în capitolul I. Același lucru este adevărat pentru b. Prin urmare, dacă două numere sînt fiecare multiplu al lui a și b, atunci diferența lor este de asemenea divizibilă prin a și b, adică este un multiplu comun.

Fie m cel mai mic multiplu comun al lui a și b și fie N un multiplu comun arbitrar. Atunci, după cum am arătat, $N - m$ este un multiplu comun al lui a și b. Dacă scădem din nou m, vom găsi că același lucru este adevărat pentru $N - 2m$. Continuînd scăderile cu m, vedem că

$$N - m,\ N - 2m,\ N - 3m, \ldots$$

sînt multipli comuni ai lui a și b. Deoarece m este ultimul dintre multiplii comuni, primul număr $N - m$ este cu siguranță nenegativ. Același lucru poate fi adevărat pentru cîteva dintre numerele următoare din șirul precedent, dar la un anumit moment trebuie să apară numere negative. Să presupunem că $N - xm$ este ultimul dintre aceste numere, care este pozitiv. El este un multiplu comun al lui a și b și nu este mai mare decît m, deoarece scăzîndu-l pe m din el obținem următorul număr din șir, presupus negativ sau nul. Deoarece m este cel mai mic multiplu comun, singura posibilitate este ca $N - xm = m$. Prin urmare, $N = xm + m = (x + 1)\ m$ este multiplu de m.

5. Putem acum vorbi de divizorii comuni a două numere. Un număr c este un divizor comun al lui a și b dacă el divide exact atît pe a, cît și pe b. Conform lemei 1, produsul ab, care este un multiplu comun al lui a și b, este un multiplu al celui mai mic multiplu comun. Putem acum demonstra

L e m a 2. *Cîtul dintre produsele a două numere întregi a și b împărțit la cel mai mic multiplu comun al acestora, adică numărul*

$$d = \frac{ab}{m},$$

este întotdeauna un divizor comun al lui a și b.

Din relația care definește pe d avem

$$d\frac{m}{a} = b$$

și m/a este un număr întreg, deoarece m este multiplu de a. Prin urmare, b este multiplu de d sau, cu alte cuvinte, d este un divizor al lui b. Exact în același mod d este un divizor al lui a și deci d este un divizor comun al lui a și b.

6. Putem demonstra acum o teoremă din care se deduce imediat unicitatea descompunerii în factori primi. Vom demonstra

T e o r e m a : *Dacă un număr prim p divide produsul xy a două numere x și y, atunci p divide sau pe x sau pe y, cu alte cuvinte divide cel puțin unul din factori.*

Considerăm cel mai mic multiplu comun m al numerelor p și x. Pe de o parte, produsul xy este multiplu de p, prin ipoteză, și este multiplu de x în mod evident. Prin urmare, el este un multiplu comun de p și x și, conform lemei 1, el este multiplu de m.

(1) $$xy = hm.$$

Pe de altă parte, conform lemei 2, numărul

(2) $$d = \frac{px}{m}$$

este un număr întreg și un divizor comun al numerelor p și x. Un divizor comun al numărului prim p poate fi numai 1 sau p. Prin urmare, avem sau $d = p$ sau $d = 1$. În primul caz $d = p$ este un divizor al lui x, astfel încît p divide primul factor x din xy. În al doilea caz, $d = 1$ și atunci (2) devide $1 = \frac{px}{m}$ sau $m = px$. Prin urmare, învirtutea relației (1), $xy = hpx$. Putem simplifica factorul x pentru a obține $y = hp$. În acest caz p divide al doilea factor y al lui xy. În orice caz, p divide cel puțin unul dintre factori.

Din cele de mai sus rezultă

C o r o l a r : *Dacă un număr prim divide un produs de mai multe numere, atunci el divide cel puțin unul dintre factori.*

Dacă divide să spunem pe xyz, atunci divide ori pe x ori pe yz. Dacă divide pe yz atunci divide sau pe y sau pe z. În ambele cazuri divide cel puțin unul din factori.

7. Unicitatea descompunerii în factori primi rezultă acum imediat. Să presupunem că avem două descompuneri

$$N = pqrs \ldots = PQRS \ldots$$

ale lui N în factori primi, atunci p divide pe N. Prin urmare, p divide produsul din dreapta. Conform corolarului, el divide cel puțin unul dintre factorii primi ai descompunerii. Dar, dacă un număr prim divide alt număr prim, atunci cele două numere trebuie să coincidă, pe baza definiției numerelor prime. Prin urmare, p trebuie să apară printre factorii primi din a doua descompunere. În același mod q și toate celelalte numere prime din prima descompunere trebuie să apară în a doua descompunere. Deoarece în raționamentul precedent putem schimba rolurile celor două descompuneri, orice factor prim din a doua descompunere trebuie să apară și în prima. Cu alte cuvinte, cele două descompuneri conțin aceiași factori primi.

Avem acum de arătat numai că fiecare factor prim apare de același număr de ori atît în dreapta, cît și în stînga. Dacă p apare de a ori în prima descompunere și de A ori în a doua descompunere, atunci

$$N = p^a q^b r^c \ldots = p^A q^B r^C \ldots .$$

Dacă a și A ar fi diferite, atunci unul dintre ele (să spunem A) ar fi mai mare. Am putea obține atunci, împărțind prin p^a,

$$M = \frac{N}{p^a} = q^b r^c \ldots = p^{A-a} q^B r^C \ldots .$$

Aceasta ar reprezenta două descompuneri în factori prim ale lui M, unde p apare cu siguranță în descompunerea din dreapta, dar nu și în cealaltă. Am arătat însă că în două descompuneri ale aceluiași număr apar aceiași factori primi. În particular, acest fapt este adevărat pentru M, astfel încît a și A nu pot fi diferiți. Prin urmare, $a = A$ și, în mod similar, $b = B$, $c = C \ldots$. Cu alte cuvinte, fiecare factor prim apare în cele două descompuneri de același număr de ori.

Este firesc să ne întrebăm care este motivul pentru care aceeași demonstrație nu este adevărată pentru numerele din sistemul $a + b\sqrt{-6}$ de la § 3. De fapt, aproape întreaga demonstrație rămîne în vigoare. Singura parte care nu mai este adevărată este lema 1. Această lemă constituie, prin urmare, un pas esențial în demonstrația noastră.

XII

Problema celor patru culori

1. În anul 1879 Cayley a ridicat următoarea problemă. O hartă este colorată în diferite culori pentru a distinge între ele diversele țări. Ar fi mai ușor dacă fiecare țară ar fi reprezentată printr-o culoare diferită de a celorlalte, dar acest lucru este prea costisitor. De obicei, se caută să se folosească cît mai puține culori, avînd grijă ca două țări vecine să fie colorate diferit. Fig. 35a reprezintă harta unei insule care necesită trei culori, albastru pentru mare și două culori pentru două țări. Fig. 35b necesită patru culori. Cele trei țări au toate acces la mare, astfel încît nici una nu poate fi colorată ca marea. Deoarece fiecare țară se învecinează cu celelalte, ele cer culori diferite, obținînd în total patru culori. Fig. 35c arată că este posibil să avem nevoie de patru culori, chiar fără a socoti și culoarea mării. Aici țara din mijloc joacă rolul mării din fig. 35b. Fig. 36 necesită, de asemenea, numai trei culori *a*, *b*, *c*, pe cînd harta mult mai complicată din fig. 37 poate fi colorată cu patru culori. Ar fi natural să ne așteptăm ca hărțile mai complicate să necesite un număr din ce în ce mai mare de culori.

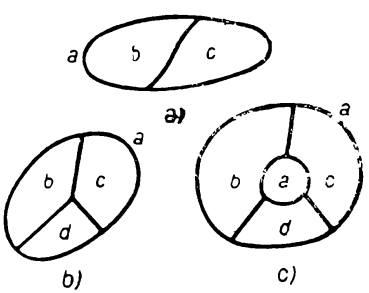


Fig. 35

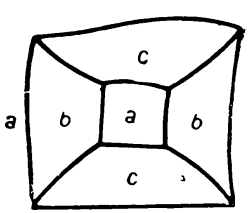


Fig. 36

Au fost trasate multe hărți dar, oricît de complicate au fost, nici una nu a necesitat mai mult de patru culori. Pe de altă parte, nu s-a putut dovedi că întotdeauna ajung numai patru culori pentru orice hartă care s-ar putea concepe. Aceasta constituie un nou exemplu de problemă care poate fi ridicată și înțeleasă fără o pregătire matematică specială, dar este încă nerezolvată. S-a dovedit însă că *orice hartă poate fi colorată cu cinci culori.* Cînd spu-

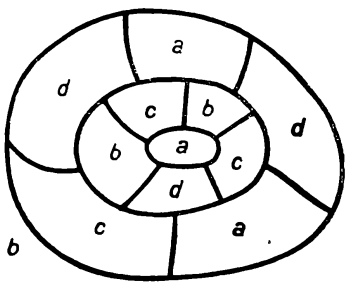


Fig. 37

nem că o hartă poate fi colorată, înțelegem prin aceasta că două țări vecine nu pot avea aceeași culoare. Totuși, două țări pot avea aceeași culoare dacă au numai un colț comun (ca într-o tablă de șah). Apoi prin țară vom înțelege o singură porțiune de teren și nu o subdiviziune politică făcută în mai multe porțiuni separate.

Scopul principal al acestui capitol va fi de a demonstra că orice hartă poate fi colorată cu cinci culori. În demonstrație putem presupune că harta reprezintă o singură insulă. Dacă fiecare insulă și marea pot fi colorate cu cinci culori, atunci cu certitudine o hartă alcătuită din mai multe insule poate fi colorată folosind aceleași culori în toate insulele.

2. Vom demonstra în prealabil *teorema lui Euler.* Această teoremă se ocupă de numărul v de vîrfuri (colțuri), f de fețe (țări), și e de muchii (frontiere) dintr-o hartă arbitrară. Ea este o teoremă generală și are aplicații importante în afara cazului de față. Această teoremă, care

a fost descoperită de Euler, dar care îi era cunoscută lui Descartes, afirmă că

$$v + f = e + 2. \tag{1}$$

În fig. 36, de exemplu, există opt vîrfuri (adică puncte în care se întîlnesc cel puțin trei țări), 6 fețe și 12 muchii (fiecare muchie se întinde de la un vîrf la următorul), și avem într-adevăr

$$8 + 6 = 12 + 2.$$

Pentru demonstrarea teoremei vom părăsi pentru moment ideea de hartă și ne vom gîndi în locul ei la o figură care reprezintă un sistem de terenuri îndiguite. Muchiile sînt acum diguri care separă terenurile reprezentate de fețe, și suprafața exterioară (inițial marea pentru hartă) este acoperită cu apă. Căutăm acum să distrugem digurile unul după altul, pînă cînd terenul este acoperit de apă (fig. 38). Procedînd astfel nu este nevoie să distrugem *toate* digurile. Orice dig împrejmuit de apă de ambele părți poate fi lăsat în picioare. Dacă dărîmăm numai digurile care au apă pe o singură față, atunci la fiecare pas vom distruge un dig, inundînd un teren în plus. Regiunea exterioară (corespunzînd mării pentru hărți) era sub apă în momentul inițial, astfel încît există exact $f-1$ terenuri care mai rămîn de inundat. Deoarece acest proces de inundare poate fi continuat cu siguranță pînă cînd toate terenurile sînt inundate, vom distruge pînă la urmă exact $f-1$ diguri.

Avem acum de considerat sistemul de diguri care a rămas intact.

a. *Se poate merge pe digurile rămase de la un vîrf la altul fără a trece prin apă.* Înainte de a începe distrugerea digurilor, acest lucru se putea face cu siguranță, deoarece am presupus de la început că harta reprezintă o *singură* insulă. Să presupunem că în cursul inundării terenurilor distrugerea unui dig AB (fig. 39) ar fi despărțit sistemul în două insule complet separate. Dacă AB ar fi distrus, atunci ar fi imposibil să mergem deasupra digului de la A la B. Cu alte cuvinte, apa ar împrejmui complet fiecare din cele două sisteme de diguri care ar rămîne după distru-

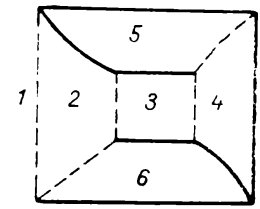


Fig. 38

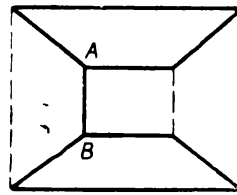


Fig. 39

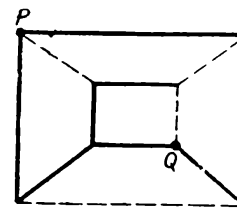


Fig. 40

gerea lui AB. Prin urmare, ar fi trebuit să existe apă de *ambele* părți ale lui AB înainte ca acesta să fie distrus, și am convenit de la început să nu distrugem asemenea diguri.

b. *Dacă trimitem un mesager de la un vîrf P la alt vîrf Q, atunci există o singură cale posibilă.* Deoarece dacă ar exista *două drumuri diferite* de la P la Q, atunci ele ar împrejmui o anumită arie (fig. 40). Centura acestor diguri nedărîmate ar menține suprafața interioară uscată, contrar faptului că toate terenurile sînt inundate.

Dacă fixăm punctul de plecare P, atunci există exact o *singură* cale care duce la fiecare vîrf. Pe fiecare cale există o ultimă muchie de străbătut pînă ajungem la vîrful respectiv. Această muchie este complet determinată de vîrful consi erat. Prin urmare, avem o corespondență între vîrfuri și muchii; asociem fiecărui vîrf ultima muchie pe care o avem de străbătut venind din P la el. Există deci tot atîtea vîrfuri disponibile cîte diguri au rămas nedărîmate. Punctul inițial P nu este un capăt de drum, astfel încît numărul digurilor nedistruse este $v - 1$. În total avem $f - 1$ diguri distruse și $v - 1$ nedistruse. Prin urmare, numărul total e de diguri este

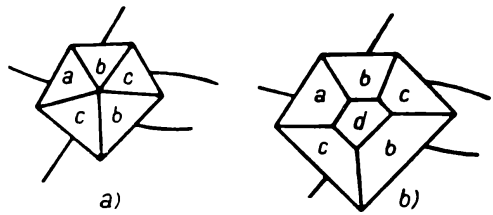
$$e = (f - 1) + (v - 1).$$

Formula lui Euler (1) se obține acum imediat, desfăcînd parantezele și trecînd în prima parte termenul numeric din a doua.

3. Ca o ultimă pregătire a demonstrației problemei celor cinci culori vom arăta că va fi suficient să dovedim că *putem colora numai cu cinci culori orice hartă în care nu există mai mult de trei țări vecine în fiecare vîrf.* Dacă avem o hartă în care se întîlnesc mai mult de trei țări într-un

vîrf (fig. 41a), atunci putem desena o altă hartă (fig. 41b), care este o copie a hărții inițiale, în afară de faptul că am introdus o nouă țară în jurul acelui vîrf. Această nouă hartă are o țară în plus și mai multe vîrfuri decît cea inițială, dar în fiecare vîrf nou al său se învecinează numai trei țări, și vîrful în care se învecinau mai mult de trei țări a

Fig. 41



fost astfel eliminat. Dacă facem acest lucru pentru fiecare vîrf în care există mai mult de trei țări vecine, vom găsi în cele din urmă o nouă hartă care nu mai conține astfel de vîrfuri. Dacă putem dovedi că orice hartă în care nu există mai mult de trei țări vecine într-un vîrf poate fi colorată cu cinci culori, atunci cinci culori vor fi suficiente și pentru harta considerată inițial. Un mod posibil de a colora harta este indicat prin litere în fig. 41 b. Putem deci colora harta inițială folosind aceleași culori pentru fiecare țară ca și pentru harta modificată, neglijînd micile țări adăugate (fig. 41a). Aceasta nu va călca regula ca două țări care au graniță comună să fie colorate diferit.

Un vîrf este un punct în care se învecinează cel puțin trei țări, dar am văzut că nu este nevoie să considerăm hărți în care să existe mai mult de trei țări cu același vîrf. Prin urmare, trebuie să considerăm numai hărți în care în fiecare vîrf se întîlnesc exact trei țări.

4. Putem acum să ne întoarcem la demonstrația propriu-zisă. Vom considera numărul de vîrfuri de pe frontiera fiecărei țări. Dacă o țară dată nu are vîrfuri sau dacă are un singur vîrf, atunci ea are o singură țară vecină și îi putem da orice culoare, exceptînd aceea a țării vecine. Aceste țări nu vor crea dificultăți, astfel încît le vom neglija și vom presupune că nu există nici o asemenea țară.

Fie f_2 numărul țărilor avînd exact două vîrfuri, f_3 numărul țărilor cu trei vîrfuri etc. Numărul total f al tuturor țărilor este suma acestor numere.

(2) $$f = f_2 + f_3 + f_4 + \dots .$$

Cele f_2 țări cu două vîrfuri au două frontiere, adică $2f_2$ frontiere în total. Cele f_3 țări cu trei vîrfuri fiecare au trei frontiere, deci $3f_3$ frontiere în total ș.a.m.d. Acest calcul ne va conduce la a lua în considerație toate frontierele, dar numărîndu-le de două ori, cîte o dată pentru fiecare din țările pe care le limitează. Prin urmare, avem:

(3) $$2e = 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots .$$

Putem număra vîrfurile în mod similar. Deoarece exact trei țări se întîlnesc în fiecare vîrf, avem

(4) $$3v = 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots .$$

Din (3) și (4) rezultă:

(5) $$3v = 2e.$$

Formula lui Euler (1) înmulțită cu 6 ne dă:

$$6v + 6f = 6e + 12$$

și, după (5), acest număr este egal cu:

$$9v + 12.$$

Prin urmare, găsim:

$$6f = 3v + 12$$

sau, ținînd seamă de (2) și (4),

$$6(f_2 + f_3 + f_4 + \dots) = (2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots) + 12,$$

care se simplifică la:

(6) $$4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + \dots .$$

Aceasta arată că în orice hartă unde în fiecare vîrf se întîlnesc exact trei țări există o țară care are mai puțin de 6 vîrfuri. Dacă nu ar exista asemenea țări, nu ar exista nici o țară cu două vîrfuri. Prin urmare, $f_2 = 0$. În același mod $f_3 = f_4 = f_5 = 0$. Urmează că partea stîngă din (6) este 0, pe cînd partea dreaptă este cel puțin 12. Hărțile din figurile 35 a, 35 b, 36 și 37 nu au țări cu mai mult de

6 vîrfuri, astfel încît formula (6) ne dă rezultatul 12 în toate aceste cazuri. Pe de altă parte avem

în fig. 35 a : $f_2 = 3$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, $f_5 = 0$,
în fig. 35 b : $f_2 = 0$, $f_3 = 4$, $f_4 = 0$, $f_5 = 0$,
în fig. 36 : $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 6$, $f_5 = 0$,
în fig. 37 : $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, $f_5 = 12$.

În toate aceste exemple există un singur număr f diferit de 0. Fig. 35c este diferită, deoarece are $f_2 = 0$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$ și toate celelalte 0.

Acum știm că în harta noastră cel puțin o țară are mai puțin de 6 vîrfuri. Ea poate avea 2, 3, 4 sau 5 vîrfuri și vom considera pe rînd fiecare din aceste patru posibilități.

a. *Există o țară cu două vîrfuri.* Această țară are exact doi vecini. Urmărim să desființăm una dintre cele două frontiere ale sale (frontiera punctată în fig. 42). Noua hartă are numai $f - 1$ țări în loc de f țări. Să presupunem pentru moment că această hartă cu mai puține țări poate fi colorată numai cu cinci culori. Vom nota cu *a* culoarea țării formată din țara inițială și de vecina sa la frontiera desființată. Culoarea celeilalte țări vecine o vom nota cu *b*. Dacă introducem la loc frontiera desființată, atunci țării inițiale cu două vîrfuri i se poate atribui culoarea *c*, deoarece această țară nu are decît două țări vecine colorate cu *a* și *b*, lăsînd disponibile culorile *c*, *d* și *e*. Prin urmare, dacă noua hartă cu $f - 1$ țări poate fi colorată cu cinci culori, atunci harta inițială cu f țări poate fi de asemenea colorată cu cinci culori.

b. *Există o țară cu trei vîrfuri.* Fie L țara și L_1, L_2, L_3 cele trei țări vecine cu ea (fig. 43). Vom desființa o fron-

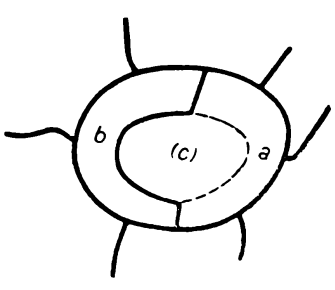


Fig. 42

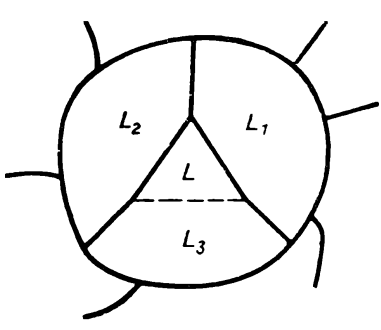


Fig. 43

tieră a lui L, presupunînd că noua hartă cu $f-1$ țări nu necesită mai mult de cinci culori. Atunci, introducînd la loc frontiera desființată, va trebui să-i dăm țării L o culoare diferită de culorile țărilor L_1, L_2, L_3. Ne rămîn două culori pentru a face acest lucru.

c. *Există o țară cu patru vîrfuri.* Argumentînd în același mod, vedem că există cel puțin o culoare disponibilă, dintre cele cinci, pentru a colora pe L, deoarece cele patru țări învecinate cu L utilizează cel mult patru culori diferite. Poate însă să apară o nouă dificultate. O țară ca L_2 din fig. 44 poate fi vecină cu L în lungul a două muchii *diferite*. Dacă desființăm una dintre aceste frontiere, trebuie să o desființăm și pe cealaltă, deoarece o frontieră nu poate despărți o țară de ea însăși; aceasta nu ar putea fi ceea ce se înțelege în mod obișnuit prin frontieră. Am obține o țară mărginită de două frontiere complet separate și rotunjită ca un inel. Am exclus în mod tacit asemenea țări în demonstrația precedentă a teoremei lui Euler. Totuși, putem evita formarea țărilor de acest fel. Dacă L și L_2 ar forma împreună un inel, atunci celelalte două frontiere ale lui L trebuie să aparțină țărilor L_1 și L_3 separate prin inel. Prin urmare L_1 și L_3 sînt diferite și nu au frontiere comune, astfel încît pot fi vopsite cu aceeași culoare. Vom desființa frontierele care separă pe L de L_1 și L_3, obținînd astfel o nouă hartă cu $f-2$ țări. Dacă această hartă cu mai puțin de f țări poate fi colorată cu cinci culori, atunci și harta inițială poate fi colorată cu aceleași culori, deoarece L are numai trei țări vecine, iar două dintre acestea au aceeași culoare. Ne rămîn deci trei culori disponibile pentru a colora pe L.

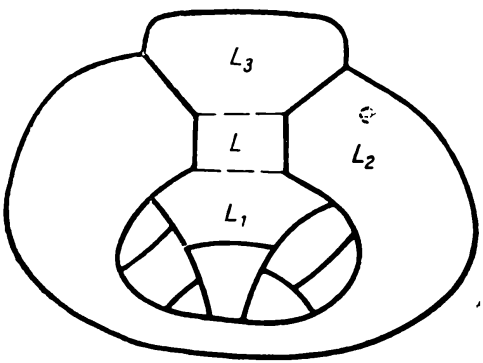
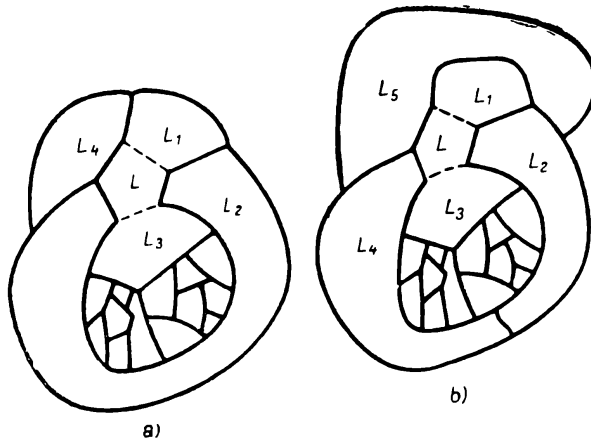


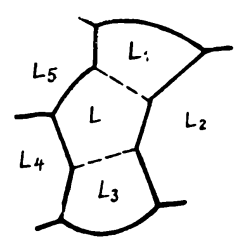
Fig. 44

Fig. 45



d. *Există o țară cu cinci vîrfuri.* Pot să apară aceleași dificultăți și chiar într-o formă mai complicată. Fie că o țară poate avea două frontiere diferite în comun cu L (fig. 45a), fie că două țări vecine ale lui L pot avea o frontieră comună (L_2 și L_4, în fig. 45b). În ambele cazuri, L are două țări vecine L_1 și L_3, care sînt diferite și nu se învecinează. Acest fapt este evident, deoarece ele nu pot străbate inelul format de L și L_2 în fig. 45a, sau L, L_2, L_4 în fig 45b. În ambele aceste cazuri, ca și în cazul simplu în care nu apar inele, L are două țări vecine L_1 și L_3, care nu se învecinează (fig. 46). Vom desființa acum frontierele

Fig. 46



dintre L și L_1 și L_3 simultan. Noua hartă are $f-2$ țări, mai puține decît harta inițială. Să presupunem din nou că noua hartă poate fi colorată cu cinci culori și că $L + L_1 + L_3$ are culoarea a, L_2 are culoarea b, L_4 culoarea c, L_5 culoarea d. În total avem patru culori. Reconstituind cele două frontiere, putem colora L cu a cincea culoare.

Orice hartă va face parte din una dintre cele patru cazuri studiate mai sus, astfel încît procedeul nostru de reducere este complet. Orice hartă poate fi redusă, desființînd una sau două frontiere. Harta redusă are mai puține culori și dacă poate fi colorată cu cinci culori, atunci și harta inițială poate fi colorată cu cinci culori. Putem acum să repetăm reducerea și să continuăm astfel pînă cînd rămîn cel mult cinci țări. O hartă care nu are mai mult de cinci țări poate fi evident colorată cu cinci culori. Același lucru este atunci adevărat pentru orice hartă care poate fi redusă, cu alte cuvinte și pentru harta inițială.

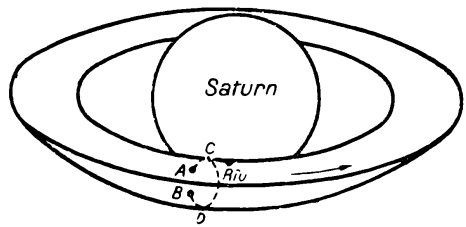
e. Am demonstrat teorema celor cinci culori pentru hărți plane. Aceeași demonstrație poate fi însă folosită pe un glob. Țara exterioară, pe care am gîndit-o ca reprezentînd marea, umple restul globului. Nu poate apărea nici o ambiguitate, deoarece am inclus marea printre țările care trebuie colorate. Demonstrația noastră rămîne adevărată, pas cu pas, pe glob. Nu este nevoie să mai refacem întregul raționament. Demonstrația nu face uz de egalitatea segmentelor sau de unghiuri. Ea nu conține nici o teoremă de egalitate a triunghiurilor și nici o altă idee care să nu mai fie adevărată pe suprafața sferei. Singurele concepte folosite sînt acelea legate de pozițiile relative ale punctelor, curbelor și suprafețelor și acestea sînt aceleași pe sferă ca și pe plan.

Situația este diferită pentru o hartă pe suprafața unui covrig sau a unei camere de automobil (numită tor). Pe această suprafață este posibil să avem o hartă alcătuită din șapte țări, dintre care fiecare să aibă frontieră comună cu toate celelalte șase. Prin urmare, o asemenea hartă ar necesita șapte culori. Nu este ușor să ne imaginăm o hartă pe această suprafață fără a avea un model la îndemînă, astfel încît ne vom mulțumi numai cu simpla afirmație. Cu siguranță că demonstrația teoremei celor cinci culori nu poate fi transpusă pe această suprafață. De ce demonstrația poate fi cu ușurință transpusă pe glob, dar deodată devine falsă pe tor?

Există două puncte în care demonstrația noastră încetează de a fi adevărată pe tor. Primul este la sfîrșitul demonstrației teoremei lui Euler, unde, referindu-ne la

fig. 40, am spus că două drumuri diferite de la P la Q ar închide o suprafață interioară. Al doilea este în demonstrația din cazurile c și d, unde am spus că L_1 și L_3 (fig. 44, 45a, 45b) nu pot fi învecinate, deoarece sînt separate printr-un inel format din L și L_2 sau L, L_2 și L_4. În ambele cazuri demonstrația pe plan sau pe sferă se bazează pe faptul că nu se poate merge dintr-un punct situat într-una dintre cele două regiuni ale planului despărțite de o curbă închisă fără autointersecții, pentru a ajunge într-un punct din cealaltă regiune fără a străbate curba. Acest fapt nu este adevărat pe tor. Pentru a vedea acest lucru să considerăm inelul lui Saturn ca fiind solidificat, în loc de a fi format de o masă de particule libere, așa cum este în realitate. Acest inel este un tor. Să presupunem, de asemenea, că în lungul inelului curge un rîu, rămînînd tot timpul în partea exterioară față de Saturn (fig. 47).

Fig. 47



Pornim din punctul A, de pe un mal al rîului. Se întreabă: este posibil să ajungem pe malul opus, în punctul B, fără a trece rîul? Tot ceea ce avem de făcut este să ne îndepărtăm de rîu către punctul C, să traversăm fața cea mai apropiată de Saturn în D și apoi să mergem pe sub inel pînă în B.

Situația aceasta arată cu cîtă precauție trebuie să facem uz de intuiție și cît de ușor ea ne poate induce în eroare. Partea din demonstrație privitoare la fig. 40 pare intuitiv evidentă, dar după cum am văzut mai sus, ea necesită în realitate o demonstrație. Această demonstrație se întemeiază pe proprietăți speciale ale planului și sferei și nu rămîne adevărată pentru tor.

Nu vom continua această analiză în profunzime. Proprietățile pe care le-am presupus pot fi dovedite, dar acest

lucru nu este ușor. În cazul torului se poate arăta că formula lui Euler trebuie înlocuită prin

$$v + f = e.$$

De asemenea, demonstrația dată de noi pentru teorema celor cinci culori poate fi reprodusă pe tor, pentru a arăta că șapte culori sînt de ajuns pentru a colora orice hartă de pe această suprafață. Este interesant să observăm că pe tor, care este mult mai complicat, problema culorilor este complet rezolvată, pe cînd pe plan sau pe sferă, care sînt mai simple, nu se știe dacă sînt necesare patru sau cinci culori.

XIII

Poliedre regulate

1. Vom folosi teorema lui Euler pentru a obține un rezultat cu totul diferit. Se pune următoarea problemă: există poliedre regulate și cît de multe anume? Un poliedru este o figură solidă, mărginită de porțiuni plane numite fețe. După Euclid, un poliedru este regulat dacă toate fețele sale sînt poligoane regulate egale.

Problema noastră va fi mai cuprinzătoare și soluția mai satisfăcătoare dacă utilizăm o definiție mai generală. Vom spune că un poliedru este regulat dacă toate fețele sale au același număr de laturi și dacă același număr de fețe pornesc din fiecare vîrf (colț). În această definiție nu se spune nimic relativ la egalitatea muchiilor unghiurilor și ariilor, nimic relativ la mărimi. Pentru această definiție sînt necesare numai numărul anumitor componente.

Vom nota cu φ numărul vîrfurilor pe care le are o față. Dacă poliedrul este format din triunghiuri, atunci $\varphi = 3$ etc. Numărul fețelor care se întîlnesc în fiecare vîrf se notează cu ε. Deoarece un poligon trebuie să aibă cel puțin trei vîrfuri, avem

$$\varphi \geqslant 3. \tag{1}$$

Într-o figură solidă, un vîrf este un punct în care se întîlnesc cel puțin trei fețe, astfel încît

$$\varepsilon \geqslant 3. \tag{2}$$

Vom nota cu v, f și e numărul de vîrfuri, de fețe și de muchii ale poliedrului respectiv.

Să presupunem că poliedrul este gol și că este făcut dintr-un material elastic cum ar fi, de pildă, cauciucul. Putem atunci să ne închipuim că figura se umflă, pînă cînd devine o sferă. Fețele poliedrului devin porțiuni de suprafețe curbe de pe sferă, iar muchiile porțiuni de curbe pe sferă. Concepînd sfera ca fiind un glob, poliedrul inițial devine o hartă reprezentînd f țări. Fiecare țară provine dintr-o față. Frontierele hărții provin din muchiile poliedrului, astfel încît există e frontiere. Analog, harta are același număr v de vîrfuri ca și poliedrul considerat. Fiecare țară are același număr φ de vîrfuri și același lucru se poate spune și despre frontiere. Prin urmare, numai unul dintre numerele $f_2, f_3, \ldots$, (§ 4)* este diferit de 0, și acesta trebuie să fie egal cu numărul total de fețe f. Din fiecare vîrf pornesc exact ε țări. Exemple de asemenea hărți sînt date în fig. 35b, 36, 37, unde avem respectiv

$$\varphi = 3,\ \varepsilon = 3\,;\ \varphi = 4,\ \varepsilon = 3\,;\ \varphi = 5,\ \varepsilon = 3.$$

Umflînd poliedrul ca mai sus, am arătat că teorema lui Euler se aplică atît pentru poliedre, cît și pentru hărți. Cu alte cuvinte, *în orice poliedru avem formula*

$$v + f = e + 2 \tag{3}$$

care leagă numărul de vîrfuri, fețe și muchii. Această formulă a fost descoperită de Euler.

2. Fiecare față a poliedrului regulat are φ vîrfuri și φ muchii. Cele f fețe ne dau $f\varphi$ muchii în total, dar în cazul nostru fiecare muchie este socotită dublu, deoarece este latură a două fețe distincte. Avem deci

$$f\varphi = 2e. \tag{4}$$

În mod analog, în fiecare vîrf se întîlnesc ε fețe și deci ε muchii. Aceasta ne dă $v\varepsilon$ muchii, dar fiecare este din nou socotită dublu, deoarece fiecare muchie are două capete. Aceasta ne conduce la formula

$$v\varepsilon = 2e. \tag{5}$$

---

* Vezi cap. XII.

Din relația (3) rezultă

$$v + f - e = 2,$$

și înmulțind cu 2ε obținem

$$2v\varepsilon + 2f\varepsilon - 2e\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Acum, ținînd seamă de (4) putem înlocui pe $2e$ prin $f\varphi$ și, deoarece din (4) și (5) reiese că $f\varphi = v\varepsilon$, putem înlocui $v\varepsilon$ prin $f\varphi$. Găsim astfel:

$$2f\varphi + 2f\varepsilon - f\varphi\varepsilon = 4\varepsilon$$

sau

$$f(2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon) = 4\varepsilon. \tag{6}$$

Întrucît f și 4ε sînt numere pozitive, același lucru rezultă și despre numerele din paranteză, astfel încît

$$2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon > 0. \tag{7a}$$

Formulele (1) și (2) ne dau limite *inferioare* pentru φ și ε. Căutăm acum să găsim limite *superioare* pentru ele din (7a). În primul rînd putem schimba semnele în (7a) pentru a obține

$$\varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon < 0. \tag{7b}$$

Comparînd partea întîi din (7b) cu produsul

$$(\varphi - 2)(\varepsilon - 2) = \varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon + 4, \tag{8}$$

observăm că ele diferă numai prin termenul 4. Prin urmare, vom aduna 4 în ambele părți din (7b):

$$\varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon + 4 < 4.$$

Din această relație și relația (8), obținem

$$(\varphi - 2)(\varepsilon - 2) < 4. \tag{9}$$

Din (1) și (2) se vede că factorii $(\varphi - 2)$ și $(\varepsilon - 2)$ din (9) sînt cel puțin 1. Prin urmare, $(\varphi - 2)$ și $(\varepsilon - 2)$ sînt numere întregi pozitive, al căror produs este mai mic

decît 4. Nu este greu să găsim toate produsele de acest fel. Ele sînt

$$1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2,\ 2 \cdot 1,\ 1 \cdot 3,\ 3 \cdot 1, \tag{10}$$

în total cinci produse. Orice alt produs de două numere întregi pozitive va fi sau 4 sau un număr mai mare. *Din faptul că există numai cinci produse de două numere pozitive întregi, inferioare lui 4, deducem că pot exista numai cinci poliedre regulate.*

3. În cele cinci produse din (10) putem presupune că primul factor este $(\varphi - 2)$, iar al doilea $(\varepsilon - 2)$. Avem atunci următoarele cinci perechi de valori pentru φ și ε:

φ	ε
3	3
3	4
4	3
3	5
5	3

Acest tabel s-a obținut direct din teorema lui Euler. Avînd în vedere semnificația lui φ și ε, din tabel se vede că poliedrele regulate, dacă există, pot avea numai fețe care să fie triunghiuri, pătrate sau pentagoane. Prin urmare, din fiecare vîrf trebuie să pornească 3,4 sau 5 fețe. Din (6) se obține acum

$$f = \frac{4\varepsilon}{2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon}$$

și ținînd seama de (8) se poate scrie

$$f = \frac{4\varepsilon}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)}. \tag{11}$$

Din (11) și (4) rezultă

$$e = \frac{f\varphi}{2} = \frac{2\varepsilon\varphi}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)}, \tag{12}$$

iar din (5) și (12) găsim

$$v = \frac{2e}{\varepsilon} = \frac{4\varphi}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)}. \tag{13}$$

Ultimele trei formule ne dau exact cîte o valoare pentru f, e și v, corespunzătoare fiecăreia dintre cele cinci perechi posibile de valori pentru φ și ε. Aceste valori sînt trecute în tabelul următor:

φ	ε	f	e	v	
3	3	4	6	4	Tetraedru
3	4	8	12	6	Octaedru
4	3	6	12	8	Hexaedru
3	5	20	30	12	Icosaedru
5	3	12	30	20	Dodecaedru

În concluzie, există numai cinci poliedre regulate. Ele se mai numesc și cele cinci corpuri ale lui Platon și au denumirile din tabel corespunzătoare numărului de fețe.

4. Acest tabel are proprietăți cu totul deosebite. Dacă φ și ε se intervertesc, atunci se intervertesc și icosaedrul și dodecaedrul, precum și octaedrul și hexaedrul, tetraedrul rămînînd neschimbat; e rămîne, de asemenea, neschimbat, pe cînd v și f se intervertesc. S-ar fi putut deduce acest fapt din formulele precedente fără ajutorul tabelului. Deoarece condițiile (1), (2) și (9) sînt simetrice în φ și ε, orice pereche admisibilă de valori pentru φ și ε este de asemenea admisibilă dacă se intervertesc φ și ε. Relația (12) este de asemenea simetrică în φ și ε, astfel încît e nu se schimbă prin intervertire. În sfîrșit, (11) și (13) arată că intervertirea lui φ și ε nu face decît să intervertească pe v și f. Aceste relații au un sens geometric. Este suficient să ne alegem un punct arbitrar în interiorul fiecărei fețe a poliedrului și să luăm aceste puncte ca vîrfuri ale unui nou poliedru. Muchiile noului poliedru trebuie trasate între fiecare pereche de vîrfuri situate pe fețe vecine în poliedrul inițial. Prin urmare, exact un vîrf din noul poliedru se află pe fiecare față a celui inițial, exact o nouă muchie intersectează fiecare muchie veche, și exact o față nouă cuprinde fiecare vîrf inițial. Prin urmare, numărul e este același în ambele poliedre, pe cînd v și f sînt intervertite.

5. Am lăsat în afara discuției un punct important. Am arătat numai că pot exista *cel mult* cinci poliedre regulate, deoarece dacă toate fețele au același număr de vîrfuri

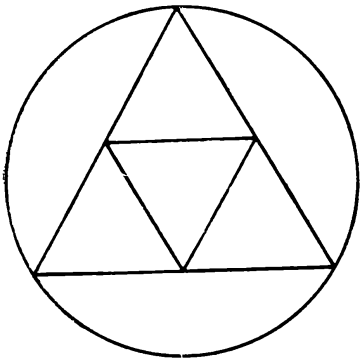


Fig. 48

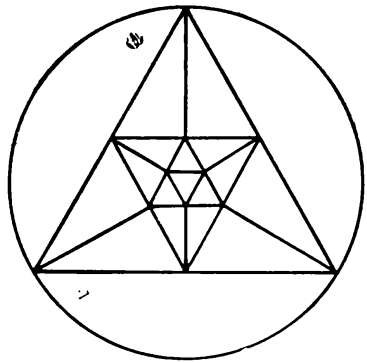


Fig. 49

și din fiecare vîrf pornește același număr de fețe, atunci numărul fețelor, al muchiilor și al vîrfurilor trebuie să corespundă uneia dintre cele cinci posibilități indicate în tabel.

Tabelul include toate poliedrele regulate posibile, dar nu s-a arătat încă dacă aceste poliedre există cu adevărat. Este posibil să existe anumite restricții ulterioare pe care să nu le fi luat în considerație. Aceste restricții ulterioare pot elimina unul sau mai multe dintre tipurile indicate în tabel. Cu un cuvînt, am găsit condiții *necesare*, dar nu și *suficiente* pentru existența poliedrelor noastre regulate.

De fapt, discuția noastră s-a purtat mai mult asupra hărților „regulate" de pe o sferă decît asupra poliedrelor însele. Aceste hărți provin din poliedre prin rotunjirea lor pînă la sfere. Putem arăta o hartă care să corespundă fiecărui tip din tabel. Fig. 35 b reprezintă un tetraedru, fig. 36 un hexaedru, iar fig. 37 un dodecaedru. Hărți corespunzătoare octaedrului și icosaedrului sînt arătate în fig. 48 și fig. 49. Deși aceste hărți sînt plane, ele pot fi transpuse pe o sferă. Dacă neglijăm acum deformarea la care au fost supuse poliedrele pentru a le transforma în sfere, se vede că condițiile care s-au găsit pentru poliedrele regulate sînt și suficiente.

Aceasta încheie discuția problemei noastre, dar nu am arătat că figurile considerate pot fi construite ca poliedre regulate în sensul definiției restrictive a lui Euclid, adică cu fețe poligoane regulate egale. Pentru a demonstra acest

fapt, ar trebui să utilizăm concepte și teoreme de o natură cu totul diferită. Considerațiile noastre au folosit numai proprietățile care rămîn neschimbate la deformare și întindere. Egalitatea figurilor nu este o astfel de proprietate. Ea necesită noțiuni de geometrie metrică, în care egalitatea lungimilor și a unghiurilor sînt importante pentru a arăta că poligoanele noastre pot fi realizate în sensul definiției lui Euclid. Nu vom da această demonstrație. Existența a numai cinci poligoane regulate, în sensul restrictiv, datează din vremurile clasice. Demonstrația este atribuită lui Theaetatus, student al lui Platon, și este dată de Euclid la sfîrșitul cărții a XII-a a *Elementelor* sale.

XIV

Numere pitagoreice și teorema lui Fermat

1. Conform teoremei lui Pitagora, pătratul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor catetelor. Reciproc, dacă se dau trei segmente, astfel încît pătratul unuia este egal cu suma pătratelor celorlalte două, atunci cele trei segmente vor forma un triunghi dreptunghic. Ecuația $a^2 + b^2 = c^2$ reprezintă faptul că segmentele de lungime a, b, c sînt laturi ale unui triunghi dreptunghic.

Am văzut în capitolul IV că ipotenuza și catetele unui triunghi dreptunghic isoscel sînt incomensurabile, că ecuația $2a^2 = c^2$ nu poate fi verificată de numere întregi a și c. Există triunghiuri dreptunghice cu laturile comensurabile? Cu alte cuvinte ecuația

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

poate fi satisfăcută de trei numere întregi? Un exemplu simplu și binecunoscut arată că răspunsul este afirmativ:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ sau } 9 + 16 = 25.$$

Există și alte soluții? Cum pot fi găsite acestea? În capitolul de față vom da răspunsul complet la aceste două probleme.

2. Dacă se dă o soluție a, b, c a ecuației (1), putem găsi cu ușurință alte soluții, înmulțind a, b, c cu un același număr întreg. Deoarece 3, 4, 5 este o soluție, înmulțind cu 2 găsim 6, 8, 10. Aceasta ne dă

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

În general, $3n$, $4n$, $5n$ vor constitui o soluție pentru orice număr întreg n. În același mod, dacă a, b, c este o soluție, atunci an, bn, cn este de asemenea o soluție, deoarece din $a^2 + b^2 = c^2$ găsim $a^2n^2 + b^2n^2 = c^2n^2$ sau $(an)^2 + (bn)^2 = (cn)^2$. Acest mod de a găsi noi soluții este banal și, prin urmare, nu prezintă interes. Este mai interesant de a găsi soluțiile de bază, adică acelea care nu pot fi găsite înmulțind o altă soluție cu un anumit număr întreg. Vom numi o astfel de soluție „soluție redusă". Astfel, 3, 4, 5 este o soluție redusă.

Dacă două sau mai multe numere nu au divizor comun, vom spune că sînt „relativ prime". Într-o soluție redusă fiecare pereche de numere a, b, c este relativ primă. Deoarece, dacă a și b, să spunem, ar avea un divizor comun d, atunci ele ar avea orice divizor al lui d ca divizor comun. Există un număr prim p care divide pe d; în cel mai rău caz d este egal cu p. Atunci a și b vor avea divizorul comun p și se poate scrie

$$a = pa_1, \quad b = pb_1.$$

Ecuația (1) ne-ar da în acest caz

$$p^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2,$$

de unde se vede că p^2 ar divide pe c^2. Prin urmare, p ar divide pe $c^2 = c \cdot c$, adică ar divide măcar unul dintre cei doi factori egali cu c. Cu alte cuvinte, p ar divide pe c ca și pe a și b. Analog, un factor comun prim al lui a și c sau al lui b și c este un factor comun al celor trei numere.

3. Să căutăm acum soluțiile a, b, c ale ecuației (1), în care orice pereche formată cu două dintre numerele a, b, c este relativ primă. Într-o asemenea soluție nu pot exista două numere pare, adică divizibile cu 2; cel mult un număr poate fi par. De asemenea, nu se poate ca toate cele trei numere să fie impare. Pătratul unui număr impar $a = (2l + 1)$ este $a^2 = 4l^2 + 4l + 1$, care este de asemenea impar. Prin urmare, dacă a și b sînt impare, atunci a^2 și b^2 vor fi de asemenea impare, astfel încît $a^2 + b^2$ este și el par și nu poate fi egal cu pătratul unui număr impar c.

Singura posibilitate care rămîne este ca două dintre numerele a, b, c să fie impare și unul să fie par. Se vede

că c trebuie să fie impar, deoarece dacă c este par, el este divizibil cu 2 și rezultă că c^2 este divizibil cu 4. Celelalte două numere trebuie să fie impare,

$$a = 2l + 1, \quad b = 2m + 1,$$

și obținem

$$a^2 + b^2 = (4l^2 + 4l + 1) + (4m^2 + 4m + 1) = 4(l^2 + \\ + l + m^2 + m) + 2.$$

Acest număr este par. Împărțindu-l cu 4 dă restul 2 și deci nu poate fi egal cu c^2, care este divizibil cu 4.

Prin urmare, c este impar și unul dintre numerele a și b este par, iar celălalt impar. Vom considera a impar și b par. Astfel, în exemplul nostru avem $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

4. Ecuația (1) poate fi scrisă sub forma

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a). \tag{2}$$

Aici $(c + a)$ și $(c - a)$, fiind sumă și diferență de numere impare, sînt ambele pare. Singurul lor factor comun este 2. Cu alte cuvinte, $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ sînt relativ prime, după cum se poate vedea presupunînd că un număr d ar divide aceste două numere. În acest caz, am avea $\frac{c+a}{2} = df$, $\frac{c-a}{2} = dg$.

Adunînd și scăzînd aceste două ecuații găsim

$$c = d(f + g), \quad a = d(f - g).$$

Rezultă că d divide atît pe a, cît și pe c, ceea ce contrazice ipoteza că ele sînt relativ prime.

Deoarece b, $c + a$, și $c - a$ sînt toate pare, putem scrie (2) sub forma

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2}, \tag{3}$$

în care fracțiile sînt numai aparente, deoarece toate numerele sînt întregi. Această ecuație exprimă pătratul $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

ca un produs de două numere relativ prime $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$. Am ajuns la pasul esențial al demonstrației. Vom demonstra că $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ trebuie să fie fiecare pătratul unui număr întreg. Dacă $\frac{b}{2}$ este descompus în factori primi

$$\frac{b}{2} = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \ldots,$$

unde p, q, r,... sînt numere prime diferite două cîte două, atunci avem

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = p^{2\alpha} q^{2\beta}, r^{2\gamma} \ldots .$$

Toți factorii primi a lui $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ trebuie să apară în $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ luați împreună. Totuși, fiecare factor prim p trebuie să apară sau numai în $\frac{c+a}{2}$ sau numai în $\frac{c-a}{2}$, deoarece $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ nu au factori comuni. Rezultă că factorii primi ai lui $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ sînt împărțiți între $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ în așa mod, încît fiecare putere de număr prim $p^{2\alpha}$, $q^{2\beta}$, $r^{2\gamma}$,... apare în întregime fie în $\frac{c+a}{2}$, fie în $\frac{c-a}{2}$. Deci, $\frac{c+a}{2}$ și $\frac{c-a}{2}$ conțin numai puteri pare de factori primi în descompunerea lor ca produs de factori primi și, prin urmare, fiecare este un pătrat perfect.

5. Se poate scrie acum

$$\text{(4a)} \qquad \frac{c+a}{2} = u^2, \quad \frac{c-a}{2} = v^2,$$

$$\text{(4b)} \qquad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = u^2 v^2,$$

unde u și v, ca și u^2 și v^2 sînt relativ prime. Din (4b) avem

$$b = 2uv, \tag{5}$$

iar prin adunarea și scăderea relațiilor (4 a) găsim

$$c = u^2 + v^2, \quad a = u^2 - v^2. \tag{6}$$

Întrucît c și a sînt ambele impare, unul dintre pătratele u^2 și v^2 trebuie să fie par, iar celălalt impar, în orice alt caz suma și diferența lor vor fi pare. Același lucru este adevărat referitor la u și v. Vom spune că o astfel de pereche de numere este de „paritate opusă".

Am demonstrat deci că dacă a, b, c este o soluție redusă a lui (1) atunci a, b și c pot fi reprezentate sub forma (5) și (6) cu ajutorul a două numere u și v, care sînt relativ prime și de paritate opusă. În exemplul nostru inițial $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, și avem

$$u^2 = \frac{5+3}{2} = 4, \quad v^2 = \frac{5-3}{2} = 1,$$

$$u = 2, \qquad v = 1,$$

și, în conformitate cu (5),

$$b = 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2uv.$$

6. Pînă în prezent am găsit numai condiții *necesare* ca o soluție să fie redusă. Am pornit de la o soluție redusă a, b, c și am găsit pe u și v. Pentru a încheia discuția trebuie să arătăm că aceste condiții sînt și *suficiente*, adică a, b, c, date de (5) și (6), constituie întotdeauna o soluție redusă dacă u și v sînt relativ prime și de paritate opusă. Vom adăuga, de asemenea, condiția $u > v$ pentru a ne asigura că a este pozitiv.

Un calcul simplu ne dă

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2,$$

astfel încît numerele date de (5) și (6) satisfac condiția (1). Apoi, pentru a vedea că avem o soluție *redusă* ne amintim că u și v sînt relativ prime și unul este par, iar celălalt impar. Ecuația (6) arată că a și c sînt ambele impare, astfel încît a, b, c nu au factorul comun 2. Ele nu pot avea

un factor comun impar, pentru că în caz contrar ele ar avea un factor prim impar p (un număr prim diferit de 2). Am putea scrie atunci

$$c = pc_1, \quad a = pa_1,$$

și din (4a) am găsi

$$2u^2 = c + a = p(c_1 + a_1),$$

$$2v^2 = c - a = p(c_1 - a_1).$$

Aceste relații arată că p divide atît pe $2u^2$, cît și pe $2v^2$. Întrucît p este diferit de 2, el ar divide pe u și v, dar acest lucru este incompatibil cu faptul că u și v sînt relativ prime.

Cîteva exemple de numere pitagoreice deduse din (5) se dau în tabelul următor:

$$u = 2,\ v = 1:\ a = 3,\ b = 4,\ c = 5$$

$$u = 3,\ v = 2:\ a = 5,\ b = 12,\ c = 13$$

$$u = 4,\ v = 1:\ a = 15,\ b = 8,\ c = 17$$

$$u = 4,\ v = 3:\ a = 7,\ b = 24,\ c = 25$$

$$u = 5,\ v = 2:\ a = 21,\ b = 20,\ c = 29$$

$$u = 5,\ v = 4:\ a = 9,\ b = 40,\ c = 41.$$

Din acest tabel se vede nu numai că b este par, dar că el este totdeauna un multiplu de 4. Acest fapt este adevărat, deoarece $b = 2uv$, unde sau u sau v este par.

7. După ce am rezolvat complet problema legată de ecuația (1), putem face o serie de generalizări. Putem să ne punem problema unei discuții asemănătoare pentru ecuația:

(7a) $$x^3 + y^3 = z^3,$$

sau pentru

(7b) $$x^4 + y^4 = z^4,$$

sau, mai general, pentru

(7c) $$x^n + y^n = z^n,$$

cu $n > 2$ arbitrar. Pierre de Fermat (1601—1665) a afirmat că ecuația (7c) nu are soluții în numere întregi pozitive x, y, z pentru $n > 2$. Această afirmație, care nu a fost încă demonstrată sau infirmată, se numește teorema lui Fermat sau teorema mare a lui Fermat, pentru a o deosebi de o altă teoremă a lui, pe care o vom menționa în capitolul 23. Totuși, afirmația a fost dovedită pentru anumite valori ale lui n. De exemplu, Kummer (1810—1893) și elevii săi au arătat că teorema este adevărată pentru orice întreg n cuprins între 3 și 100. Înainte de ei, Euler (1707—1783) a dovedit acest lucru pentru ecuațiile (7a) și (7b).

Cu ajutorul cunoștințelor noastre despre numerele pitagoreice putem demonstra ușor că (7b) nu poate fi rezolvată în numere întregi pozitive. Putem chiar arăta că ecuația

$$x^4 + y^4 = w^2 \tag{8}$$

nu admite soluții în numere întregi pozitive. Deoarece orice putere de gradul 4 este implicit un pătrat, dar nu și orice pătrat este putere de gradul 4, insolubilitatea ecuației (8) constituie un rezultat mai general decît insolubilitatea ecuației (7b).

Discutînd soluțiile, insistăm asupra numerelor întregi *pozitive* pentru a elimina anumite soluții banale. De exemplu, (8) este satisfăcută pentru $x = 1$, $y = 0$, $w = 1$, iar (7a) pentru $x = -y$, $z = 0$.

8. Dacă scriem (8) sub forma

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = w^2, \tag{9}$$

vedem că ea este un caz particular al ecuației (1), unde $a = x^2$, $b = y^2$, $c = w$. Deoarece căutăm numai soluții „reduse" x, y, z, putem să arătăm (așa cum am făcut mai înainte) că dacă (9) admite o soluție, atunci w trebuie să fie impar, pe cînd unul dintre pătratele x^2 și y^2 trebuie să fie par, iar celălalt impar. Putem pune $x^2 = a$, impar, iar $y^2 = b$, par. Dacă (9) admite o soluție, ea trebuie să fie dată de (5) și (6). Trebuie să existe două numere relativ prime u și v, de paritate opusă, care să determine numerele

$$\text{(10a)}\ x^2 = u^2 - v^2; \quad \text{(10b)}\ y^2 = 2uv; \quad \text{(10c)}\ w = u^2 + v^2.$$

Dar (10a) poate fi scrisă sub forma

$$x^2 + v^2 = u^2 \tag{11}$$

care este o ecuație de tipul (1), cu, x, v, u relativ prime. Aici u joacă rolul lui c, prin urmare este impar. Deoarece x este de asemenea impar, w trebuie să fie par și, prin urmare, joacă rolul lui b. Soluția redusă x, v, u a ecuației (11) trebuie de asemenea să fie dată de (5) și (6) cu ajutorul a două numere u_1 și v_1, de paritate opusă. Cu alte cuvinte, x, v, u sînt date de

$$x = u_1^2 - v_1^2,\ v = 2u_1v_1,\ u = u_1^2 + v_1^2. \tag{12}$$

Să revenim la ecuația (10b). Deoarece u este impar, v par și ele sînt relativ prime, vedem că u și $2v$ sînt prime între ele. Aceasta deoarece 2 nu divide pe u. Prin urmare, (10b) exprimă pe y^2 ca un produs de doi factori u și $2v$ relativ primi. Conform discuției din § 4, o astfel de factorizare a unui pătrat este posibilă numai dacă fiecare dintre factorii relativ primi este un pătrat. Prin urmare, avem

$$u = w_1^2,\ 2v = 4t_1^2, \tag{13}$$

unde am făcut uz de faptul că $2v$ este par. Dacă introducem aceste două valori în ultimele două ecuații (12) găsim

$$t_1^2 = u_1v_1,\ w_1^2 = u_1^2 + v_1^2. \tag{14}$$

Acum u_1 și v_1 sînt relativ prime și produsul lor este t_1^2, astfel încît ele trebuie să fie de asemenea pătrate de numere întregi,

$$u_1 = x_1^2,\ v_1 = y_1^2. \tag{15}$$

A doua ecuație din (14) devine

$$x_1^4 + y_1^4 = w_1^2. \tag{16}$$

9. Ecuația (16) este de același tip ca ecuația inițială (8). Pornind de la o soluție redusă x, y, z (numere pozitive) a ecuației (8), am găsit o altă soluție redusă a aceleiași ecuații. A doua soluție se obține din prima printr-un anumit proces. Fără a străbate întregul proces, putem vedea că valoarea lui w din prima soluție este mai mare

decît valoarea lui w din a doua. Deoarece, din (10c) și din prima ecuație (13) avem

$$w = u^2 + v^2 = w_1^4 + v^2 > w_1^4$$

și, prin urmare, $w > w_1$.

Aceasta ne permite să ajungem la o contradicție. Așa cum am procedat în § 8 pentru a obține din x, y, w soluția x_1, y_1, w_1, putem obține acum din x_1, y_1, w_1 o altă soluție x_2, y_2, w_2, unde $w_1 > w_2$, similar cu $w > w_1$. Repetînd procedeul, ajungem la o nouă soluție x_3, y_3, w_3, cu $w_2 > w_3$. Continuînd în acest mod, obținem un șir de soluții cu

$$w > w_1 > w_2 > w_3 \ldots . \tag{17}$$

Aceste numere sînt toate întregi, pozitive. Există numai un număr finit de întregi pozitivi, mai mici decît w, astfel încît șirul (17) trebuie să se oprească, să spunem la w_k. Dar acest w_k face parte dintr-o soluție, x_k, y_k, w_k, și putem aplica procedeul din § 8 pentru a obține încă o soluție x_{k+1}, y_{k+1}, w_{k+1} cu $w_k > w_{k+1}$. Aceasta contrazice faptul că șirul (17) se încheie cu w_k. Prin urmare, am stabilit faptul că (8) nu poate avea nici o soluție formată din numere întregi pozitive, deoarece ipoteza existenței unei asemenea soluții ne conduce la o contradicție.

Ideea de bază a acestei demonstrații a fost numită de Fermat „principiul coborîrii infinite". Acesta constă din obținerea unei contradicții prin găsirea unui proces (în acest caz aplicarea repetată a § 8) care să furnizeze un șir infinit de numere întregi pozitive descrescătoare. Un astfel de șir trebuie să aibă un capăt, deoarece există numai un număr finit de întregi pozitivi mai mici decît un întreg dat n, anume $(n-1)$, $(n-2)$,..., 3, 2, 1, care sînt în număr de $(n-1)$.

Principiul coborîrii infinite a fost esențial în demonstrația iraționalității lui $\sqrt{2}$ din capitolul IV.

XV

Teorema mediei aritmetice și a mediei geometrice

Un experimentator atent măsoară un anumit obiect și găsește că lungimea sa este 2,172 m. Repetînd măsurătorile sale încă de două ori, el obține lungimile 2,176 și 2,171 m. Care dintre aceste numere trebuie acceptat ca adevărata lungime a obiectului? Într-un asemenea caz se obișnuiește să se folosească media măsurătorilor, adunîndu-le pe toate și împărțindu-le apoi la numărul lor. Experimentatorul găsește totalul de 6,519 și, împărțind la 3, acceptă 2,173 m ca lungime a obiectului. Această medie se numește media aritmetică. Media aritmetică a n numere a_1, a_2, a_3,..., a_n este

$$(1) \qquad A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

Vom vedea în curînd că există și alte feluri de medii posibile pe lîngă media aritmetică, dar mai întîi să vedem ce trebuie să însemne o medie. Dacă experimentatorul ar fi făcut aceleași măsurători în centimetri în loc de metri, el ar fi acceptat cu siguranță că media obținută trebuie să fie aceeași ca și înainte, exceptînd faptul că de astă dată ea ar fi exprimată în centimetri. Fiecare măsurătoare ar fi înmulțită cu 100 și rezultatul trebuie să fie înmulțit cu 100. Același lucru ar fi adevărat dacă înmulțim cu un număr arbitrar t, în loc de a înmulți cu 100, astfel încît experimentatorul ar fi putut folosi orice altă unitate de măsură. Dacă media aritmetică (1) este un fel rezonabil de medie, ea trebuie să aibă proprietatea: dacă fiecare

număr a este înmulțit cu t, atunci rezultatul final A este de asemenea înmulțit cu t. Astfel,

$$(A) \qquad tA = \frac{1}{n}(ta_1 + ta_2 + ta_3 + \ldots + ta_n).$$

Acest lucru este evident adevărat, deoarece împărțind ambele părți din (A) prin t, găsim (1). Vom exprima această proprietate (A) spunînd că media aritmetică este „omogenă". Orice medie trebuie să fie omogenă.

O a doua proprietate, mai simplă, pe care trebuie să o aibă o medie este următoarea: media numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nu trebuie să fie inferioară celui mai mic dintre numerele a și nici superioară celui mai mare dintre ele. Ar fi nerezonabil pentru experimentator dacă ar fi obținut, să spunem, 2,177 ca medie a măsurătorilor sale. Media aritmetică (1) are această proprietate, deoarece suma a n numere este cu siguranță cel puțin egală cu de n ori cel mai mic dintre aceste numere și este cel mult egală cu de n ori cel mai mare dintre ele.

Există un mod evident în care media aritmetică poate fi schimbată. Dacă experimentatorul ar fi făcut ultima dintre cele trei măsurători cu o precizie sensibil mai mare, atunci celelalte două nu ar trebui să aibă aceeași importanță în rezultatul final. Dacă el apreciază că această măsurătoare este de patru ori mai precisă decît celelalte două, el poate să adune primele două măsurători 2,172 și 2,176 și să adauge apoi de patru ori ultima măsurătoare. Acum pentru a obține media, după ce le adună, trebuie să împartă cu 6, obținînd 2,172 m. Ar fi fost mai ușor să adune primele două măsurători cu a treia, înmulțită cu 4 și să împartă totalul la $1 + 1 + 4 = 6$. O astfel de medie se numește o medie aritmetică ponderată. Dacă a_1 este înzestrat cu ponderea w_1, a_2 cu ponderea w_2, a_3 cu ponderea w_3, ..., a_n cu ponderea w_n, atunci media aritmetică ponderată este

$$W = \frac{1}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}(w_1a_1 + w_2a_2 + w_3a_3 + \ldots + w_na_n).$$

Este foarte simplu să verificăm faptul că o medie aritmetică ponderată are cele două proprietăți pe care tebuie să le aibă orice medie. Deși considerațiile pe care le-am făcut pot fi extinse la mediile ponderate, nu vom încerca această extindere. Aceasta n-ar face decît să complice notațiile, fără să adauge nici o idee esențială nouă.

Trecînd la un nou exemplu, să presupunem că avem cinci pătrate, două de latură 1, unul de latură 2, unul de latură 5 și unul de latură 7. Care este media mărimilor acestor pătrate? Dacă ne interesează *lungimile laturilor* pătratelor, vom forma media aritmetică a acestor lungimi 3,2. Dacă ne interesează *ariile* pătratelor, avem două arii egale cu 1, una egală cu 4, una egală cu 25 și una egală cu 49, iar media aritmetică a acestora ar fi 16. Aceasta corespunde unui pătrat de latură 4. Referitor la *laturi*, vom spune că pătratul mediu are latura 3,2, dar relativ la *arii* pătratul mediu are latura 4. Dacă ne gîndim cum am obținut numărul 4, vedem că am ridicat lungimile la pătrat, le-am adunat, le-am împărțit la 5 și am extras rădăcina pătrată din rezultat. O astfel de medie se numește „medie pătratică". Media pătratică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ este

$$R = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)}. \tag{2}$$

Această medie are, de asemenea, cele două proprietăți necesare pentru orice medie. Vom verifica numai că este omogenă. Dacă înmulțim fiecare număr a din (2) cu t avem

$$\sqrt{\frac{1}{n}(t^2a_1^2 + t^2a_2^2 + t^2a_3^2 + \ldots + t^2a_n^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}t^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_n^2)} =$$

$$= t\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)},$$

care este tocmai R din relația (2), înmulțit cu t.

În exemplul precedent, media aritmetică nu este mai mare decît media pătratică. Acest fapt nu este accidental, ci este adevărat pentru orice mulțime de numere $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Pentru a dovedi acest fapt, vom arăta mai întîi un altul, (6), care este de interes considerabil în sine.

Dacă un număr pozitiv, negativ sau 0 este ridicat la pătrat, rezultatul este un număr pozitiv sau 0. Prin urmare, avem

$$0 \leqslant (c_1 - d_1)^2 = c_1^2 - 2c_1d_1 + d_1^2,$$

oricare ar fi numerele c_1 și d_1. Adunînd $2c_1 d_1$ în ambele părți ale acestei inegalități, găsim

$$2c_1d_1 \leqslant c_1^2 + d_1^2.$$

În mod analog

$$2c_2d_2 \leqslant c_2^2 + d_2^2,$$

$$2c_3d_3 \leqslant c_3^2 + d_3^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2c_nd_n \leqslant c_n^2 + d_n^2.$$

Deoarece partea stîngă a fiecărei inegalități este cel mult egală cu partea dreaptă respectivă, suma părților din stînga este cel mult egală cu suma părților din dreapta.

$$2c_1d_1 + 2c_2d_2 + 2c_3d_3 + ... + 2c_nd_n \leqslant c_1^2 +$$
$$+ d_1^2 + c_2^2 + d_2^2 + c_3^2 + d_3^2 + ... + c_n^2 + d_n^2.$$

Putem scrie aceasta sub forma

$$(3) \qquad 2(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + ... + c_nd_n) \leqslant$$
$$\leqslant (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + ... + c_n^2) +$$
$$+ (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + ... + d_n^2).$$

Aceasta este adevărată, oricare ar fi numerele $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$. Dacă $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ și $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$

sînt, de asemenea, numere arbitrare, atunci putem pune

$$(4) \qquad r = \sqrt[4]{\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n}},$$

$$c_1 = ra_1,\ c_2 = ra_2,\ c_3 = ra_3,\ \ldots,\ cn = ra_n,$$

$$d_1 = \frac{b_1}{r},\ d_2 = \frac{b_2}{r},\ d_3 = \frac{b_3}{r},\ \ldots,\ d_n = \frac{b_n}{r}.$$

Deoarece $c_1 d_1 = ra_1 \cdot \frac{b_1}{r} = a_1 b_1,\ c_2 d_2 = a_2 b_2, \ldots, c_n d_n = a_n b_n,$ relația (3) devine

$$(5) \qquad 2\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n) \leqslant$$

$$\leqslant (r^2 a_1^2 + r^2 a_2^2 + r^2 a_3^2 + \ldots + r^2 a_n^2) +$$

$$+ \left(\frac{b_1^2}{r^2} + \frac{b_2^2}{r^2} + \frac{b_3^2}{r^2} + \ldots + \frac{b_n^2}{r^2}\right).$$

Folosind (4), prima parte din dreapta poate fi scrisă sub forma

$$r^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) =$$

$$= \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n}}\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Analog, partea a doua din dreapta formulei (5) este

$$\frac{1}{r^2}\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n}}\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)},$$

și (5) devine

$$2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Împărțind ambele părți cu 2 avem

$$(6) \qquad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)}.$$

Aceasta este inegalitatea lui Cauchy, numită astfel după numele matematicianului francez A. L. Cauchy.

Pentru a arăta că media aritmetică nu este mai mare decît media pătratică, ne amintim că a și b din (6) pot fi numere arbitrare și luăm $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = \frac{1}{n}$

Obținem atunci

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \frac{a_3}{n} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)},$$

unde în ultima paranteză din dreapta sînt exact n termeni $\frac{1}{n^2}$. Această paranteză este egală cu $n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ și inegalitatea noastră devine

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

Am obținut tocmai ceea ce trebuia să demonstrăm, deoarece partea stîngă este media aritmetică (1), iar partea dreaptă este media pătratică (2).

Este interesant să revedem metoda prin care am ajuns la inegalitatea (6). Ideea esențială este că pătratul unui număr nu este niciodată negativ. Din aceasta am obținut un număr de inegalități a căror sumă este (3). Relația (3) nu a fost tocmai ceea ce căutam, dar din ea am obținut (6), înlocuind literele c și d cu anumite combinații de alte litere. Această idee de a înlocui o mulțime de litere cu altele este des întrebuințată în studiul ine-

galităților, uneori cu rezultate cu totul surprinzătoare. În demonstrația formulei (6) ar fi fost posibil, deși nu chiar simplu, să demonstrăm întîi (6) și apoi să obținem (3), schimbînd literele în (6).

Pentru a introduce încă un fel de medie vom considera un alt exemplu de măsurători. Un obiect este cîntărit punîndu-l într-un taler al unei balanțe și egalîndu-l în celălalt taler cu o greutate. Dacă balanța nu este corectă sau a fost stricată, poate fi o ușoară diferență între lungimile celor două brațe, și aceasta ar face cîntărirea incorectă. Este în mod obișnuit imposibil de a măsura lungimile brațelor riguros, astfel încît vom face două cîntăriri, una punînd obiectul în talerul stîng și alta punîndu-l în dreapta. Dacă rezultatele acestor două cîntăriri sînt a_1 și a_2, ce valoare trebuie considerată drept adevărata greutate? Vom folosi media aritmetică sau un alt fel, mai potrivit, de medie? Pentru a răspunde acestei întrebări se presupune că lungimea brațului stîng al balanței este l, iar cea a brațului drept r. Nu putem măsura aceste lungimi, dar brațele au cu siguranță anumite lungimi. În fizica elementară se arată că produsul dintre greutate și lungimea brațului dintr-o parte a balanței este egal cu produsul corespunzător din cealaltă parte. Dacă w este adevărata greutate a obiectului, rezulta că $wl = a_1 r$ în prima cîntărire și $wr = a_2 l$ în a doua. Dacă înmulțim aceste ecuații, parte cu parte, găsim $wlwr = a_1 r a_2 l$ sau, simplificînd cu lr, $w^2 = a_1 a_2$. Adevărata greutate a obiectului este dată prin formula $w = \sqrt{a_1 a_2}$. Aceasta este un nou fel de medie, numită media geometrică a numerelor a_1 și a_2.

Ce se înțelege prin media geometrică a mai multor numere? Dacă ni se dau n numere pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, vom înmulți întîi toate aceste numere, obținînd $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Se pune întrebarea: trebuie acum să extragem rădăcina pătrată din acest număr? Pentru a decide acest lucru să ne amintim că o medie trebuie să fie omogenă. Dacă înmulțim fiecare a cu t, acest produs devine $ta_1 \cdot ta_2 \cdot ta_3 \ldots ta_n = t^n a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Pentru ca rezultatul final să fie înmulțit cu t, rezultă că avem de extras radicalul de or-

dinul n și nu rădăcina pătrată. Putem acum spune că media geometrică a n numere pozitive a_1, a_2, a_3, ...,a_n este

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}. \tag{7}$$

Una dintre teoremele celebre referitoare la medii este teorema despre media aritmetică și media geometrică. Ea stabilește că media geometrică a n numere pozitive nu este niciodată mai mare decît media aritmetică $G \leqslant A$. Există diferite demonstrații ale acestei teoreme. Vom reproduce o demonstrație simplă, deosebit de interesantă, dată de Cauchy.

Vom demonstra întîi teorema pentru două numere a_1 și a_2.

Avem

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 4a_1a_2) = \frac{1}{4}(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) +$$

$$+ a_1a_2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + a_1a_2.$$

Deoarece pătratul $\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$ nu este negativ, rezultă că $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$ este egal cu a_1a_2 mărit cu un număr care nu este negativ. Cu alte cuvinte,

$$a_1a_2 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2. \tag{8}$$

Rădăcina pătrată din partea stîngă este G, iar rădăcina pătrată din partea dreaptă este A, astfel încît am dovedit teorema pentru două numere arbitrare a_1 și a_2.

Vom dovedi acum teorema pentru mai multe numere. Ar fi natural să considerăm trei numere, dar se dovedește mai ușor de a considera cazul a patru. Întrucît (8) este adevărată pentru orice numere a_1 și a_2, putem înlocui a_1 prin a_3 și a_2 prin a_4, obținînd

$$a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2.$$

Din aceasta și din (8) avem

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2,$$

care se poate scrie sub forma

$$(9) \qquad a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left[\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\right]^2.$$

Deoarece (8) este adevărată pentru orice numere, putem înlocui a_1 prin $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ și a_2 prin $\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)$ pentru a obține

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right) \leqslant \left[\frac{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}{2}\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2.$$

Folosind aceasta în (9) obținem

$$(10) \qquad a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4.$$

Aceasta este tocmai teorema noastră în cazul a patru numere, deoarece rădăcina de ordinul patru din partea stîngă este G, iar rădăcina de ordinul patru din partea dreaptă este A.

Putem repeta acest argument din nou pentru a demonstra teorema pentru cazul a opt numere. Aplicînd (10) avem

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4\left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^4,$$

și ținînd seamă de (8) în membrul drept obținem ca și mai înainte

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8.$$

Aceasta ne dă teorema în cazul a opt numere.

Continuînd demonstrația în același mod, vedem că $G \leqslant A$ pentru orice mulțime de n numere pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dacă n este 2, 4, 8, 16, ... $= 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...$, adică dacă n este o putere a lui 2. Rămîne să mai dovedim teorema pentru $n = 3, 5, 6, ...$, toate numerele care nu sînt puteri ale lui 2. Acest lucru este acum extrem de simplu. Dacă $a_1 a_2 a_3, ..., a_n$ sînt numere pozitive arbitrare, putem găsi o putere a lui 2, 2^m, care să fie mai mare decît n (dacă $n = 50$, de exemplu, vom lua $m = 6$ deoarece $2^6 = 64 > 50$). Vom scrie atunci

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3, ..., \quad b_n = a_n$$

$$b_{n+1} = b_{n+2} = ... = b_{2^m} = A,$$

unde A este media aritmetică (1) a numerelor a. Acum $b_1, b_2, b_3, ..., b_{2^m}$ este o mulțime de 2^m numere pozitive; astfel încît, conform celor demonstrate, media geometrică a acestora nu este mai mare decît media lor aritmetică

$$\sqrt[2^m]{b_1 b_2 b_3 ... b_2} \leqslant \frac{1}{2^m} (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{2m}).$$

Ridicînd ambele părți ale acestei inegalități la puterea 2^m și introducînd valorile precedente ale numerelor b, găsim

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n A A ... A \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2^m} (a_1 + a_2 + a_3 + ... a_n + A + A + ... + A) \right]^{2^m}$$

sau

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n A^{2^m - n} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2^m} (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + \frac{2^m - n}{2^m} A \right]^{2^m}.$$

În conformitate cu (1), partea dreaptă se reduce la

$$\left(\frac{1}{2^m} \cdot nA + \frac{2^m - n}{2^m} A \right)^{2^m} = \left[\frac{n + 2^m - n}{2^m} A \right]^{2^m} = A^{2^m},$$

și putem divide ambele părți cu A^{2m-n} pentru a obține

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \leqslant A^n.$$

Extrăgînd rădăcina de ordinul n din ambele părți obținem

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \leqslant A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n),$$

adică $G \leqslant A$, și astfel teorema despre media aritmetică și media geometrică este dovedită.

XVI

Cercul subîntins de o mulțime finită de puncte

1. Considerăm o mulțime finită formată din n puncte P_1, P_2,..., P_n, din plan. Distanțele dintre fiecare pereche de puncte P_i și P_j pot fi măsurate.

Există o distanță cea mai mare printre aceste distanțe, care sînt în număr finit [1]. Această distanță maximă se numește *diametrul* mulțimii de puncte.

Dacă o mulțime de n puncte are diametrul d, atunci putem trasa un cerc de rază d care să conțină toate cele n puncte (fig. 50). Tot ceea ce avem de făcut este să trasăm un cerc de rază d cu centrul într-un punct arbitrar dintre cele n puncte, să spunem P_1. Deoarece distanța oricărui alt punct pînă la P_1 este cel mult d, cercul conține toate celelalte puncte P_2, P_3, ..., P_n, ca și centrul său P_1.

Totuși este ușor să construim un cerc mai mic, care de asemenea conține toate cele n puncte. În primul rînd vom căuta perechea de puncte aflate la distanța d. Dacă există mai multe perechi de acest fel, vom alege una arbitrară. Vom nota aceste două puncte cu P_1 și P_2 și vom trasa două cercuri de rază d în jurul lor (fig. 50). Cercul cu centrul în P_1 trece prin P_2 și reciproc. Acum toate cele n puncte ale mulțimii sînt situate în fiecare dintre aceste cercuri, astfel încît ele se află în porțiunea plană comună ambelor cercuri, porțiunea haşurată din figură. Dacă cele două cercuri se intersectează în S_1 și S_2, atunci cercul care are segmentul S_1S_2 ca diametru cuprinde întreaga

[1] Folosind cap. VIII, § IX, cap. IV, se vede ușor că există exact $\frac{n(n-1)}{2}$ perechi diferite formate cu aceste n puncte.

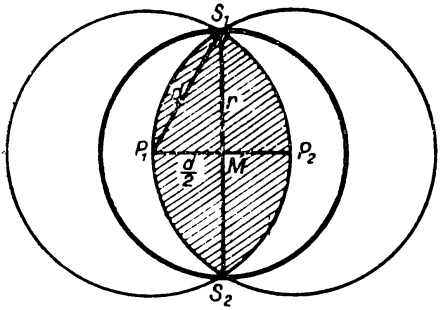


Fig. 50

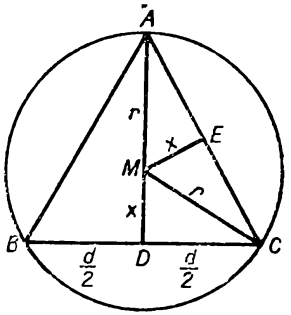


Fig. 51

arie comună și, prin urmare, întreaga mulțime de n puncte. Raza r a acestui nou cerc poate fi găsită aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul P_1MS_1

$$r^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\,d^2, \quad r = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

Vom numi un cerc care cuprinde toate cele n puncte ale mulțimii cerc „acoperitor" al mulțimii. În afară de cercul acoperitor inițial de rază $r = d$, am găsit un cerc acoperitor de rază

$$r = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ldots d.$$

2. Este posibil de a înlocui acest număr $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ printr-un număr mai mic? Răspunsul este dat de următoarea teoremă, datorită lui H. W. E. Jung: Orice mulțime finită de puncte de diametrul d admite un cerc acoperitor de rază cel mult egală cu $\frac{d}{3}\sqrt{3} = 0{,}577\ldots d$. Există multe mulțimi finite de puncte care admit cercuri acoperitoare mai mici, dar unele necesită un cerc chiar de această mărime. Pe de altă parte, deoarece două puncte nu pot fi situate la distanță mai mare decît diametrul $2r$ al cercului acoperitor, avem $2r \geqslant d$ și, prin urmare, cercul acoperitor nu poate avea raza mai mică decît $\frac{d}{2}$. Demonstrația teoremei lui Jung constituie obiectul acestui capitol.

Un cerc acoperitor de rază $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ poate fi găsit cu ușurință pentru mulțimea de trei puncte care formează vîrfurile unui triunghi echilateral de latură d. El este tocmai cercul circumscris triunghiului. Folosind notațiile din fig. 51 și scriind $r + x = h$, găsim

$$d^2 = h^2 + \frac{d^2}{4}$$

din triunghiul dreptunghic ABD. Aceasta ne dă

(1) $$h^2 = \frac{3d^2}{4}$$

și

(2) $$h = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

Din triunghiul DCM avem

$$x^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

și, prin urmare,

$$(h - r)^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

$$h^2 - 2hr + r^2 + \frac{d^2}{4} = r^2,$$

$$h^2 + \frac{d^2}{4} = 2hr.$$

Folosind (1), obținem

$$d^2 = 2hr,$$

$$r = \frac{d^2}{2h},$$

și, prin urmare, după (2)

$$r = \frac{d^2}{d\sqrt{3}} = \frac{d}{3}\sqrt{3}.$$

Pentru triunghiul echilateral este evident că cercul circumscris este cel mai mic cerc acoperitor. Totuși, nu vom insista asupra acestui punct, deoarece el va apare în mod natural în cele ce urmează.

3. Pentru a dovedi teorema lui Jung pentru o mulțime arbitrară de puncte, vom porni prin a încerca să găsim un cerc de rază cît mai mică între toate cercurile acoperitoare posibile. Vom face o serie de pași care ne vor conduce la cercuri acoperitoare din ce în ce mai mici.

a. Un cerc acoperitor C_1, care nu are puncte din mulțimea finită S pe circumferință, poate fi întotdeauna înlocuit cu un cerc mai mic C_2. Putem trasa cercul C_2 cu același centru M ca și C_1 și trecînd printr-unul dintre punctele mulțimii S, situat la distanță maximă de M.

b. Dacă numai *un singur* punct al mulțimii S se află pe cercul acoperitor C_3, atunci acest cerc poate fi înlocuit cu unul mai mic (fig. 52). Notînd cu P_1 punctul lui S situat pe circumferința cercului C_3, vom trasa toate cercurile care trec printr-un alt punct al lui S și au aceeași tangentă ca și C_3 în P_1. Aceste cercuri se află toate în interiorul lui C_3. Să notăm cu C_4 pe cel mai mare dintre ele. El este diferit de C_3, deoarece P_1 este singurul punct al lui S de pe circumferința C_3, iar C_4 are încă un punct al lui S pe circumferință. Acum C_4 acoperă toate cercurile noi și, prin urmare, toate punctele lui S. Apoi el are *două* puncte pe circumferință și este mai mic decît C_3.

c. Punctele lui S, situate pe circumferința unui cerc acoperitor, îl împart în arce. Vom numi un arc „arc liber" dacă nici un punct al lui S nu se află pe el, exceptînd capetele sale. Putem face acum pasul următor de micșorare a cercurilor. Dacă există un arc liber, pe un cerc acoperitor, mai mare decît jumătate din circumferință, atunci cercul acoperitor poate fi înlocuit cu unul mai mic [1].

Fie P_1 și P_2 două puncte ale lui S, care sînt capete ale unui arc liber b de pe cercul acoperitor C_5. Presupunem în plus că b este mai mare decît o semicircumferință

[1] Cazurile *a* și *b* pot fi considerate drept cazuri particulare ale lui *c*, deoarece în fiecare dintre ele întreaga circumferință este arc liber.

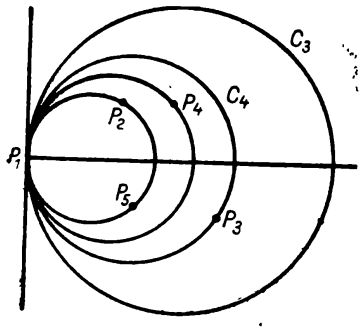


Fig. 52

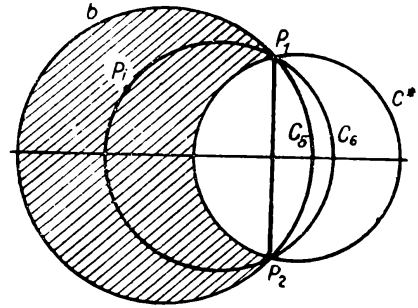


Fig. 53

(fig. 53). Ducem cercul C * cu diametrul P_1P_2. Dacă toate punctele lui S sînt acoperite de C^*, atunci el este un cerc acoperitor mai mic decît C_5; deoarece C_5, în care coarda P_1P_2 nu este diametru (altfel b ar fi o semicircumferință), trebuie să fie mai mare decît C^*. Dacă nu toate punctele lui S sînt cuprinse în C^*, atunci restul punctelor pot fi cuprinse în aria dintre b și C^* (aria hașurată din figură). Nici un punct al lui S în afară de P_1 și P_2 nu se află pe b, deoarece acesta este arc liber. Ducem acum toate cercurile posibile care trec prin P_1 și P_2 și un alt punct din S situat în spațiul semilunar. Partea de circumferință a fiecăruia din aceste cercuri interioară lui C_5 este interioară părții semilunare și, prin urmare, exterioară lui C^*. Partea din circumferință rămasă interioară lui C^* este exterioară lui C_5. Fie C_6 cercul al cărui arc, cuprins în zona semilunară, este cel mai mare. C_6 cuprinde toate punctele lui S, deoarece el cuprinde toate punctele lui S situate în zona semilunară ca și din aria comună lui C_5 și C^*. Această arie conține restul punctelor din S, nesituate în zona semilunară. În plus C_6 este mai mic decît C_5. Circumferința sa este cuprinsă între circumferințele cercurilor C_5 și C^*, astfel încît centrul său este mai apropiat de coarda P_1P_2 decît centrul lui C_5 și, prin urmare, el este mai mic.

Dacă un cerc acoperitor nu mai poate fi micșorat prin operațiile a, b, sau c, atunci el nu poate să aibă arce libere mai mari decît o semicircumferință. Un astfel de cerc trebuie fie să aibă două puncte ale lui S diametral

opuse, sau trebuie să aibă trei, ori mai multe puncte din S, care să împartă circumferința în arce mai mici decît o semicircumferință. Vom numi primul gen de cercuri acoperitoare „cercuri diametrice“ și al doilea „cercuri tripunctate“. Pașii, a, b, c aplicați unui cerc acoperitor ne vor conduce la unul dintre aceste două tipuri. Este posibil ca un cerc acoperitor să fie de ambele tipuri, de exemplu, un cerc prin cele patru vîrfuri ale unui pătrat.

4. Să ne închipuim că am trasat toate cercurile posibile care au două puncte ale mulțimii finite diametral opuse, ca și toate cele care trec prin trei puncte ale mulțimii [1]. Nu toate dintre aceste cercuri vor fi acoperitoare, dar printre acestea se va afla orice cerc diametric, ca și orice cerc tripunctat. Deoarece avem un număr finit de astfel de cercuri, pot exista numai un număr finit de cercuri diametrice sau tripunctate. Prin urmare, putem compara toate aceste cercuri particulare și să găsim pe cel *mai mic. Acest cerc c este cel mai mic cerc acoperitor posibil*, deoarece el este mai mic decît toate cercurile diametrice ori tripunctate și, conform cu a, b și c, el trebuie să fie mai mic decît orice alt cerc acoperitor. În plus, el este unic. Dacă ar exista un cerc acoperitor c' de aceeași mărime (fig. 54), atunci S s-ar afla în c' ca și în c. Urmează că S se află în aria comună celor două cercuri. Deoarece această arie poate fi în întregime cuprinsă într-un cerc mai mic c^*, aceasta ar contrazice proprietatea minimală a lui c. Vom numi acest cerc unic determinat *cercul subîntins de mulțimea finită de puncte.*

Cercul subîntins c nu poate avea arce libere mai mari de o semicircumferință, deoarece, conform cu c, am putea găsi atunci un cerc acoperitor mai mic.

5. Acum vom arăta că raza cercului acoperitor nu poate depăși $\frac{d}{3}\sqrt{3}$. În acest scop vom căuta o pereche de puncte ale lui S de pe circumferința c, situate la o distanță cel puțin egală cu aceea a unei perechi arbitrare de puncte de pe S aflate pe circumferință. Distanța δ

[1] Există cel mult $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ astfel de cercuri.

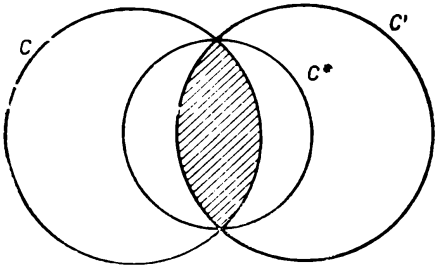


Fig. 54

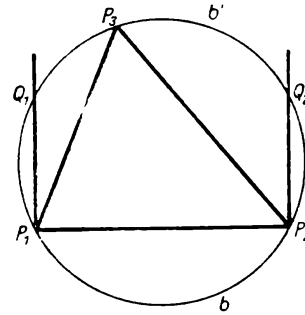


Fig. 55

între aceste puncte cu siguranță nu este mai mare decît diametrul d al lui S.

În primul rînd se poate întîmpla ca două puncte din S să fie capete ale unui diametru din c. În acest caz diametrul $2r$ al lui c este egal cu $\delta \leqslant d$. Prin urmare, avem $r \leqslant \frac{d}{2}$ și, cu atît mai mult, $r < \frac{d}{3}\sqrt{3}$.

În al doilea rînd, să presupunem că nu există două puncte ale lui S diametral opuse. Vom considera atunci cel mai mare arc liber b de pe circumferința c. Dacă există mai multe arce de aceeași mărime, vom alege unul arbitrar dintre ele. Capetele P_1 și P_2 ale lui b vor fi puncte ale lui S. Arcul b este mai mic decît o semicircumferință, deoarece nu există arce libere mai mari decît o semicircumferință, și dacă mărimea lui b ar fi de o semicircumferință, atunci capetele sale P_1 și P_2 ar fi diametral opuse, contrar ipotezei. Să considerăm acum coarda P_1P_2 și să ridicăm perpendicularele în capetele sale (fig. 55). Aceste perpendiculare întîlnesc cercul în încă două puncte Q_1 și Q_2. Arcul b' interceptat de Q_1 și Q_2 este opus lui b și egal cu el. Punctele Q_1 și Q_2 nu aparțin lui S, deoarece Q_1 și P_2 sînt diametral opuse, ca și Q_2 și P_1. Prin urmare, dacă unul dintre punctele Q_1 și Q_2 ar aparține lui S, am contrazice ipoteza. Dar, *arcul b' nu poate fi liber*; dacă ar fi liber, atunci ar putea fi extins dincolo de Q_1 și Q_2, la un arc liber mai mare decît b. Acest lucru nu este posibil, deoarece nu există arce libere mai mari decît b.

Astfel, există cel puțin un punct P_3 a lui S între Q_1 și Q_2 pe b'. Punctele P_1, P_2, P_3 formează un *triunghi ascuțit-unghi*. Unghiurile din P_1 și P_2 sînt ascuțite, deoarece ele sînt mai mici decît unghiurile drepte construite în aceste puncte. Unghiul din P_3 interceptează arcul b, care este inferior unui semicerc. Prin urmare, P_3 este de asemenea ascuțit, deoarece un unghi înscris într-un semicerc este drept, iar unghiurile corespunzătoare arcurilor mai mici sînt mai mici.

Circumferința lui c este împărțită în trei arce prin P_1, P_2, P_3. Unul dintre aceste arce trebuie să fie cel puțin egal cu o treime de circumferință, dar el este mai mic decît o semicircumferință, deoarece unghiurile triunghiului $P_1P_2P_3$ sînt ascuțite. Coarda sa $P_i\,P_j$ trebuie să fie, prin urmare, cel puțin cît coarda care interceptează o treime de circumferință, adică, cel puțin cît latura triungiului echilateral înscris în cercul c. Deoarece lungimea lui P_iP_j poate să fie cel mult egală cu diametrul d, avem $s \leqslant d$.

În § 2 am găsit că raza r' a cercului circumscris triunghiului echilateral de latură s este $r' = \frac{s}{3}\sqrt{3}$. Deoarece $s \leqslant d$ avem, pentru raza r a lui c,

$$r \leqslant \frac{d}{3}\sqrt{3},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

6. Vom căuta acum să vedem dacă marginea $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ nu poate fi micșorată mai mult. Să aplicăm metoda din § 4 mulțimii T formată din cele trei vîrfuri ale unui triunghi echilateral. Cercurile care trec prin două puncte ale lui T diametral opuse sînt desenate în fig. 56. Singurul cerc acoperitor dintre acestea este cercul circumscris. Nu există alte cercuri cu care să putem compara acest cerc, astfel încît el este cercul subîntins. Latura triunghiului este egală cu diametrul d, iar raza cercului circumscris este $\frac{d}{3}\sqrt{3}$. Deoarece această mulțime particulară are un cerc subîntins de rază $\frac{d}{3}\sqrt{3}$, ar fi imposibil să micșorăm limita de mai sus pentru o mulțime arbitrară.

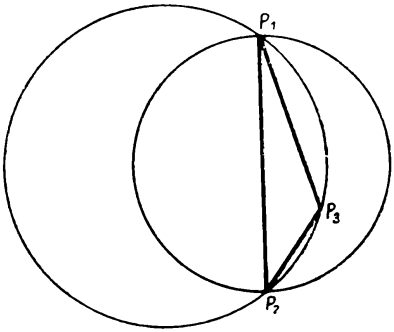


Fig. 56

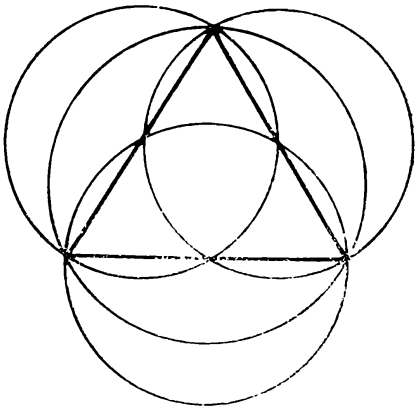


Fig. 57

Am folosit aici § 4 pentru a demonstra că cercul circumscris este de fapt cercul subîntins de mulțimea T. Că acesta este cercul subîntins pare a fi un lucru evident, care nu necesită nici o demonstrație, însă lucrurile nu stau chiar așa. Cercul subîntins de vîrfurile unui triunghi obtuzunghi *nu* este cercul circumscris, ci cercul care are cea mai mare dintre laturile triunghiului ca diametru (fig. 57).

XVII

Aproximarea numerelor iraționale cu ajutorul numerelor raționale

Numărul $\frac{22}{7}$ este o aproximație veche și extrem de cunoscută pentru numărul π, aria unui cerc de rază 1. De asemenea, $\sqrt{2}$ este apropiat de $\frac{7}{5}$. Care este sensul exact al acestor afirmații? Cuvintele „aproximativ" și „apropiat de" nu aparțin vorbirii matematice, totuși aceste expresii trebuie să aibă un anumit sens. De ce se folosește de obicei $\frac{22}{7}$ pentru a aproxima numărul π și nu o altă fracție cu numitorul 8, de exemplu?

1. Dacă se dă un număr w, există numere raționale oricît de apropiate de el. De exemplu, dacă $w = \pi = 3{,}14159...$, atunci fracțiile

$$3{,}1 = \frac{31}{10},\ 3{,}14 = \frac{314}{100},\ 3{,}141 = \frac{3141}{1000},\ ...$$

sînt din ce în ce mai apropiate de π. Prima fracție diferă, evident, de π cu mai puțin decît $\frac{1}{10}$, deoarece $\frac{32}{10}$ ar fi cert prea mare, a doua fracție diferă cu mai puțin de $\frac{1}{100}$ etc. În mod analog, putem aproxima orice număr w oricît de mult de îndată ce cunoaștem scrierea sa ca fracție zecimală.

Această proporție are cu siguranță un anumit inconvenient din punct de vedere estetic, prin faptul că este legată de numărul 10. Întregul nostru sistem zecimal acordă numărului 10 un rol aparte printre celelalte nu-

mere, dar alegerea lui 10 este mai mult o chestiune de convenienţă şi obişnuinţă şi nu denotă nici o distincţie matematică asociată lui. Proporţia poate fi degajată de acest cusur, punînd-o sub următoarea formă, în care în locul numerelor 10, 10^2, ... s-a luat un număr n arbitrar.

Teorema 1. *Dacă w este un număr şi n un număr întreg arbitrar, atunci există un număr raţional $\frac{m}{n}$, cu numitorul n, care diferă de w cu mai puţin de $\frac{1}{n}$, $0 \leqslant$*

$$\leqslant w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}.$$

De exemplu, să considerăm $w = \sqrt{2}$, $n = 5$. În acest caz, w se află între 1 şi 2 şi, prin urmare, el se află într-unul din cele cinci intervale dintre numerele

$$1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2. \tag{1}$$

Fiecare dintre aceste intervale este de lungime $\frac{1}{5}$, astfel încît tot ceea ce trebuie să facem este să găsim ultima dintre fracţiile de mai sus, inferioară lui $\sqrt{2}$. Aceasta va fi o fracţie cu numitorul 5 şi va diferi de 2 cu mai puţin de $\frac{1}{5}$. Acelaşi lucru se poate face pentru un număr arbitrar w şi pentru un întreg arbitrar n. Dacă g este cel mai mare număr întreg inferior lui w, atunci vom considera numerele raţionale

$$g, g + \frac{1}{n}, g + \frac{2}{n}, \ldots, g + \frac{n-1}{n}, g + 1, \tag{2}$$

şi vom căuta ultimul dintre acestea, care este inferior sau egal cu w. Acest număr, pe care îl putem numi $g + \frac{l}{n}$, va diferi de w cu mai puţin de $\frac{1}{n}$, astfel încît avem

$$0 \leqslant w - \left(g + \frac{l}{n}\right) < \frac{1}{n}, \tag{3}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să căutăm numerele din (1) între care este cuprins $\sqrt{2}$. Calculul este ceva mai simplu dacă eliminăm numitorul 5. Vom înmulți totul cu 5 și vom căuta numerele între care se află $5\sqrt{2}$ în șirul

(1 a) $$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$

Întrucît $5\sqrt{2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = \sqrt{50}$, vom căuta cel mai mare număr întreg inferior lui $\sqrt{50}$. Din $49 < 50 < 64$ rezultă $7 < \sqrt{50} < 8$ și, prin urmare, 7 este numărul căutat. Împărțind cu 5, observăm că $\sqrt{2}$ se află între $\frac{7}{5}$ și $\frac{8}{5}$ și prin urmare

(4) $$0 \leqslant \sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{5}.$$

Demonstrația generală a teoremei 1 poate fi, de asemenea, simplificată dacă ne dispensăm de numitor. Considerăm nw în loc de w și căutăm cel mai mare număr întreg care nu depășește pe nw. Notînd acest număr cu m, rezultă $m \leqslant nw < m + 1$, de unde $0 \leqslant nw - m < 1$. Împărțind cu n, obținem rezultatul cerut

$$0 \leqslant w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}.$$

2. Este, prin urmare, natural faptul că există numere raționale oricît de apropiate de π și $\sqrt{2}$. Care este atunci sensul afirmațiilor că π este aproximativ egal cu $\frac{22}{7}$ și că $\sqrt{2}$ este aproximativ egal cu $\frac{7}{5}$? El constă în faptul că teorema 1 ne arată numai că $\frac{7}{5}$ diferă de $\sqrt{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{5}$, cînd de fapt el este mai apropiat. Este ușor să verificăm inegalitatea

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12},$$

și, prin urmare, $\sqrt{2}$ diferă de $\frac{7}{5}$ cu mai puțin de $\frac{17}{12}$.

Cu alte cuvinte, avem

$$\left|\sqrt{2}-\frac{7}{5}\right|<\frac{17}{12}-\frac{7}{5}=\frac{1}{60},$$

care este mult mai mic decît numărul $\frac{1}{5}$ garantat de teorema 1. Similar, inegalitatea

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7},$$

dovedită de Arhimede, conduce la

$$\frac{22}{7}-\pi<\left(3+\frac{10}{70}\right)-\left(3+\frac{10}{71}\right)=\frac{10}{70}-\frac{10}{71}=\frac{10}{70\cdot 71}=\frac{1}{497},$$

interesant de comparat cu $\frac{1}{7}$ din teorema 1.

Pînă în prezent, ideea de număr rațional „mult apropiat" de un număr dat nu este totuși un concept matematic. Vom căuta să-i dăm un sens precis. El este dat de:

Teorema 2. *Dacă w este un număr irațional și N un întreg arbitrar, atunci există o fracție $\frac{m}{n}$ al cărei numitor nu depășește pe N și care diferă de w cu mai puțin decît $\frac{1}{nN}$. În plus, există o infinitate de fracții $\frac{m}{n}$ care diferă de w cu mai puțin de $\frac{1}{n^2}$.*

Aplicată celor două exemple precedente, teorema afirmă că $\left|\sqrt{2}-\frac{7}{5}\right|$ este mai mic decît $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$, și $\frac{22}{7}-\pi$ este mai mic decît $\frac{1}{49}$. Deși aceste limite sînt totuși mai mari decît diferența reală, teorema reprezintă o îmbunătățire substanțială a primei teoreme, oarecum banală.

Pentru a demonstra teorema, nu vom considera numai numărul Nw și cel mai mare număr întreg inferior acestuia. În schimb, vom considera șirul de numere

$$w,\ 2w,\ 3w,\ \ldots,\ Nw,$$

și pentru fiecare vom lua cel mai mare număr întreg mai mic decît el:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots,\ g_N.$$

Atunci avem

$$0 < w - g_1 < 1,\ 0 < 2w - g_2 < 1,\ 0 < 3w - g_3 < 1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 0 < Nw - g_N < 1.$$

Demonstrația va fi mai clară dacă examinăm mai întîi un caz particular. Să luăm $w = \lceil\overline{2}$, $N = 13$ și avem

$$\begin{aligned}
\lceil\overline{2} &= 1{,}414\ldots = 1 + 0{,}414\ldots\\
2\lceil\overline{2} &= 2{,}828\ldots = 2 + 0{,}828\ldots\\
3\lceil\overline{2} &= 4{,}242\ldots = 4 + 0{,}242\ldots\\
4\lceil\overline{2} &= 5{,}656\ldots = 5 + 0{,}656\ldots\\
5\lceil\overline{2} &= 7{,}071\ldots = 7 + 0{,}071\ldots\\
6\lceil\overline{2} &= 8{,}485\ldots = 8 + 0{,}485\ldots\\
7\lceil\overline{2} &= 9{,}899\ldots = 9 + 0{,}899\ldots\\
8\lceil\overline{2} &= 11{,}313\ldots = 11 + 0{,}313\ldots\\
9\lceil\overline{2} &= 12{,}727\ldots = 12 + 0{,}727\ldots\\
10\lceil\overline{2} &= 14{,}142\ldots = 14 + 0{,}142\ldots\\
11\lceil\overline{2} &= 15{,}556\ldots = 15 + 0{,}556\ldots\\
12\lceil\overline{2} &= 16{,}970\ldots = 16 + 0{,}970\ldots\\
13\lceil\overline{2} &= 18{,}384\ldots = 18 + 0{,}384\ldots
\end{aligned}$$

Dintre toate resturile prin care fiecare din aceste numere depășește numărul întreg care îl precede, al cincilea este cel mai mic, $5\lceil\overline{2} - 7 = 0{,}071\ldots$, și al 12-lea este cel mai mare, $12\lceil\overline{2} = 16 + 0{,}970\ldots = 17 - 0{,}030\ldots$ sau $17 - 12\lceil\overline{2} = 0{,}030\ldots$. Să ne închipuim că am scris cele

13 resturi prin care numerele de mai sus depășesc întregii respectivi, ordonîndu-i după mărime. Avem atunci 13 numere dispuse între 0 și 1. Ele formează 14 intervale de diferite mărimi. Unul dintre aceste intervale trebuie să aibă o lungime mai mică decît $\frac{1}{14}$, pentru că dacă toate ar fi mai mari sau egale cu $\frac{1}{14}$, atunci împreună ar fi cel puțin $\frac{14}{14} = 1$, și ele nu ar putea să aibă lungimea totală 1 decît dacă fiecare ar fi exact $\frac{1}{14}$. Dar dacă ele ar fi fiecare egal cu $\frac{1}{14}$, atunci $\sqrt{2}$, fiind unul dintre aceste 13 numere, ar depăși numărul 1 exact cu $\frac{1}{14}$, $\sqrt{2} = 1 + \frac{m}{14}$. Adică $\sqrt{2}$ ar fi rațional. Întrucît am presupus că w este irațional și am demonstrat iraționalitatea numărului $\sqrt{2}$ în capitolul 4, intervalele nu pot fi toate egale cu $\frac{1}{14}$, astfel încît trebuie să existe cel puțin un interval inferior lui $\frac{1}{14}$. Știm numai că există un astfel de interval, dar nu știm care anume este el. Totuși, putem nota capătul inferior al acestui interval cu $a\sqrt{2} - g_a = r_a$, și capătul superior prin $b\sqrt{2} - g_b = r_b$. În acest caz avem

$$0 < r_b - r_a = (b\sqrt{2} - g_b) - (a\sqrt{2} - g_a) < \frac{1}{14},$$

și, prin urmare,

$$0 < (b - a)\sqrt{2} - (g_b - g_a) < \frac{1}{14}.$$

Deoarece a și b sînt unul dintre numerele 1, 2, 3, ... 13 și a este diferit de b, diferența $b - a$ este, abstracție făcînd de semn, tot unul dintre aceste numere. Adică $-13 \leqslant b - a \leqslant 13$. Prin urmare, sau $(b - a)\sqrt{2}$, sau $(a - b)\sqrt{2}$, și anume acela dintre ele care este pozitiv, este unul dintre multiplii lui $\sqrt{2}$; îl vom numi $n\sqrt{2}$

Apoi $n\sqrt{2}$ diferă de numărul întreg ($g_b - g_a$ sau $g_a - g_b$) în plus sau în minus cu mai puțin de $\frac{1}{14}$. Notînd acest număr întreg cu m avem

$$-\frac{1}{14} < n\sqrt{2} - m < \frac{1}{14}, \quad n \leqslant 13.$$

Împărțind prin n obținem rezultatul final

$$-\frac{1}{14n} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{14n}.$$

Demonstrația generală decurge exact în același fel. Numărul irațional w joacă rolul lui $\sqrt{2}$, N înlocuiește pe 13, $N+1$ pe 14 și putem arăta că există un număr $n \leqslant N$, astfel încît să avem

$$(5) \qquad -\frac{1}{(N+1)\,n} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{(N+1)\,n}.$$

Acesta dovedește prima parte din teorema 2.

Luînd $n \leqslant N$, formula (5) implică

$$(6) \qquad -\frac{1}{n^2} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Găsim astfel fracții care diferă de w cu mai puțin de $\frac{1}{n^2}$. Numărul N nu apare în relația (6), dar el a fost folosit în alegerea fracției $\frac{m}{n}$ cu numitorul $n \leqslant N$.

În exemplul numeric precedent n este 5 pentru $N = 5, 6, 7, \ldots, 11$ și avem

$$0 < 5\sqrt{2} - 7 < \frac{1}{5}, \quad 0 < \sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{5^2}.$$

Cînd N este egal cu 12, $n = 12$ și avem în acest caz

$$0 < 17 - 12\sqrt{2} < \frac{1}{12}, \quad 0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < \frac{1}{12^2}.$$

Pentru $N = 13$, n este din nou 12 etc.

A doua parte a teoremei 2 afirmă că pentru orice număr irațional dat w există o infinitate de fracții $\frac{m}{n}$ care au proprietatea (6). Pentru a demonstra aceasta, este suficient să arătăm că o dată cu fiecare fracție $\frac{m}{n}$ satisfăcînd (6) putem găsi întotdeauna o altă fracție $\frac{m'}{n'}$, mai apropiată de w și care satisface totodată relația (6). Întrucît w este irațional, el nu poate fi egal cu o fracție. Prin urmare,

$$w - \frac{m}{n}$$

nu este egal cu 0, și astfel diferă de 0 printr-un anumit rest. Din această cauză trebuie să existe o fracție $\frac{1}{N'}$ cu N' suficient de mare, care să fie mai apropiată de 0 decît $w - \frac{m}{n}$. Adică avem

$$(7) \qquad 0 < \frac{1}{N'} < w - \frac{m}{n} \text{ sau } 0 < \frac{1}{N'} < \frac{m}{n} - w,$$

după cum $w - \frac{m}{n}$ este pozitiv sau negativ. Înlocuind pe N' cu N în raționamentul precedent, putem găsi o fracție $\frac{m'}{n'}$ cu $n' \leqslant N'$, care satisface inegalitățile

$$(8) \qquad -\frac{1}{(N'+1)n'} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{(N'+1)n'},$$

corespunzătoare lui (5). Aceasta arată că

$$-\frac{1}{n'^2} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{n'^2}.$$

Apoi, ținînd seamă de (8), rezultă

$$-\frac{1}{N'+1} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{N'+1},$$

adică $w - \frac{m'}{n'}$ diferă de 0 cu *mai puțin* de $\frac{1}{N'+1}$. Dar,

conform relației (7), $w - \frac{m}{n}$ diferă de 0 cu *mai mult* de $\frac{1}{N'}$. Prin urmare, $\frac{m'}{n'}$ este mai aproape de w decît $\frac{m}{n}$ și, prin urmare, $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$ sînt diferite.

3. Din cele de mai sus rezultă că nu există *ultima fracție* $\frac{m}{n}$ cu proprietatea (6). Orice astfel de fracție este urmată de o alta, așa încît există o infinitate, după cum afirmă teorema 2. Pe cînd teorema 1, care este banală, admite orice număr întreg ca numitor, ultima teoremă pune în evidență numitori speciali, care au proprietatea (6). Îi vom numi pe aceștia „numitori buni". Exemplul nostru numeric inițial arată că 2, 5, 12 sînt numitori buni pentru aproximarea lui $\sqrt{2}$. Apoi, continuînd calculul, găsim numitorii buni 29, 70, 169, ...

Pentru π numărul 7 este un numitor bun. În realitate el este mult mai bun decît afirmă teorema 2. Deoarece avem $\frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{497}$, care este mult mai mic decît $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$. Se poate pune întrebarea dacă există numitori și mai buni decît aceia pe care i-am găsit, numitori pentru care să avem eventual $-\frac{1}{n^3} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}$ sau alte inegalități similare.

Vom arăta acum că o astfel de îmbunătățire a teoremei 2 este, în general, imposibilă. Vom considera cazul particular $w = \sqrt{2}$ și vom arăta că *orice fracție* $\frac{m}{n}$ *diferă de* $\sqrt{2}$ *cu mai mult de* $\frac{1}{3n^2}$.

Considerăm întîi fracțiile mai mari decît $\sqrt{2}$. Pentru $\frac{m}{n} \geqslant 2$, întrucît $\sqrt{2} < 1{,}45$, diferența $\frac{m}{n} - \sqrt{2}$ este mai mare decît 0,55, pe cînd $\frac{1}{3n^2} \leqslant \frac{1}{3}$ este mai mică decît 0,55. Pentru $1{,}55 \leqslant \frac{m}{n} < 2$ avem $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant 0{,}10$, pe

cînd $\frac{1}{3n^2}$ este mai mic decît $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12} < 0{,}10$, deoarece n este acum cel puțin 2. Dacă $\frac{m}{n}$ este între $\sqrt{2}$ și 1,55, avem

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 = \frac{m^2 - 2n^2}{n^2} = \frac{g}{n^2},$$

unde g este un număr întreg pozitiv. Prin urmare, g este cel puțin egal cu 1 și

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Folosind formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, găsim

$$\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right) \geqslant \frac{1}{n^2}$$

și astfel

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} \geqslant \frac{1}{n^2} \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}}.$$

Deoarece $\frac{m}{n}$ este mai mic decît 1,55, rezultă $\frac{m}{n} + \sqrt{2} < 1{,}55 + 1{,}45 = 3$, astfel încît inversul său este mai mare decît $\frac{1}{3}$ și

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} > \frac{1}{3n^2},$$

după cum am afirmat. În sfîrșit, pentru $0 < \frac{m}{n} < \sqrt{2}$ putem găsi un argument similar:

$$2 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{g}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2},$$

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} \geqslant \frac{1}{n^2} \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}} > \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3n^2}.$$

XVIII

Mișcări rectilinii produse de mecanisme

Mașina cu abur creată de James Watt era dotată cu un mecanism deosebit, numit paralelogramul lui Watt, datorită formei sale. Aparatul, arătat schematic în fig. 58, constă din cinci bare articulate în punctele C, D, E, F. În A și B barele sînt ținute în poziție cu ajutorul unor pivoți, care le permit să se rotească [1]. Toate articulațiile sînt făcute astfel încît barele să nu iasă din plan. Tija pistonului se atașează în F. Scopul acestui aparat era de a forța capătul pistonului să se miște în linie dreaptă. Acest lucru este necesar pentru a împiedica pistonul să se blocheze în cilindru. Totuși se poate arăta matematic că punctul F nu descrie exact o linie dreaptă. El se mișcă mai curînd după o curbă, atît de apropiată însă de o linie dreaptă, încît mecanismul poate servi scopului pentru care a fost creat.

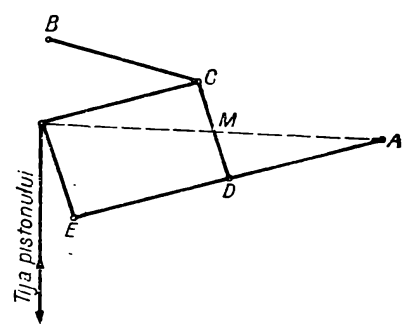


Fig. 58

[1] În figurile schematice, articulațiile fixe sînt reprezentate prin cercuțe pline, iar articulațiile mobile, prin cercuțe albe. Liniile punctate sînt auxiliare și nu reprezintă tije.

Paralelogramul $CDEF$, după care și-a luat numele mecanismul, nu este în realitate o parte esențială a acestuia. Partea esențială este articulația $ADCB$. Pentru mișcări nu prea mari, această articulație obligă mijlocul tijei DC să parcurgă aproximativ o linie dreaptă. Dacă mecanismul este construit astfel încît $AD = DE = CF = BC$ și $DC = EF$ (tija AE trebuie să fie rigidă) punctele A, M, F se vor afla tot timpul pe o linie, din cauză că triunghiurile AEF și ADM sînt asemenea. Întrucît, datorită asemănării acestor triunghiuri, AF este dublul

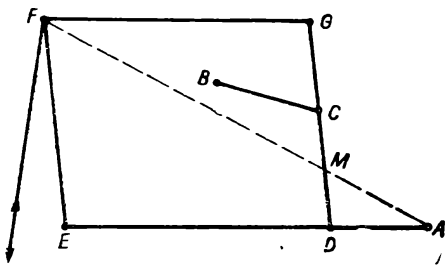


Fig. 59

lui AM, punctul F are o mișcare similară mișcării lui M, dar de mărime dublă. Mișcarea lui M poate fi mărită de k ori. Luăm $AD = BC$, astfel încît mijlocul M al lui CD va descrie aproximativ o linie dreaptă, dar vom mări dimensiunile paralelogramului $DEFG$ (fig. 59) pentru a obține

$$AD/AE = DM/EF = 1/k.$$

Pentru a studia mișcarea paralelogramului lui Watt putem să ne restrîngem la discutarea mișcării lui M. Este ușor de arătat că mișcarea acestui punct nu este rectilinie, considerînd cîteva poziții extreme ale mecanismului. Totuși, deoarece această mișcare particulară nu este importantă pentru subiectul nostru, nu o vom studia mai departe.

2. Producerea unei mișcări rectilinii cu ajutorul mecanismelor a fost de o importanță considerabilă în istoria proiectării de mașini, și problema a fost reluată de un număr mare de autori. Scopul particular pentru care a creat Watt mecanismul său nu are importanță. Într-un vapor modern cu aburi capătul tijei pistonului este menținut pe o linie dreaptă printr-un mecanism de o natură

cu totul deosebită, printr-o tijă perpendiculară care alunecă pe două direcții paralele. Este posibil ca inventatorii din vechime să fi fost conduși la mecanisme mai complicate, deoarece au avut o idee eronată asupra mărimii forțelor de frecare.

Problema mecanismelor n-a fost numai o preocupare a practicienilor, ea i-a atras și pe matematicieni. Aceștia din urmă au considerat evident problema în forma sa riguroasă, de a găsi un mecanism în care un pivot să urmeze cu precizie o linie dreaptă. Primul matematician care și-a pus această problemă a fost P.L. Cebîșev (1821—1894). El a studiat paralelogramul lui Watt și îmbunătățirile sale posibile, fără a găsi un mecanism care să descrie o linie dreaptă riguroasă. În prima jumătate a secolului trecut s-au făcut multe alte încercări neîncununate însă de succes. În cele din urmă matematicienii au început să se îndoiască că o asemenea soluție exactă ar fi posibilă.

În 1864, Peaucellier a imaginat un mecanism care produce o mișcare rectilinie. Acest aparat se numește inversorul lui Peaucellier. Apoi, așa cum se întîmplă adesea în istoria invențiilor, s-au găsit un număr mare de alte soluții ale problemei. S-au inventat mecanisme care produc diferite curbe, dintre care linia dreaptă este numai un caz particular.

3. Vom considera acum inversorul lui Peaucellier. Acest mecanism produce nu numai o mișcare rectilinie, dar totodată o „inversiune a planului". O inversiune este o transformare de tip special a planului în el însuși. Prin transformare vom înțelege o corespondență a planului cu el însuși, în care fiecare punct are o imagine. Cîteva transformări simple sînt următoarele: (1) simetria (reflexia sau oglindirea) față de o dreaptă, folosită în repetate rînduri în capitolele V și VI; (2) deplasarea paralelă, în care imaginea fiecărui punct se găsește deplasînd punctul dat, cu o anumită mărime fixă, într-o direcție fixă; (3) rotația planului în jurul unui punct fix, de un unghi fix; (4) dilatarea planului în jurul unui punct (centrul), în care fiecare punct se deplasează în lungul unei raze pornind din centru, astfel încît distanța sa pînă la centru se mărește într-un raport constant $1/\lambda$. Imaginea unui punct

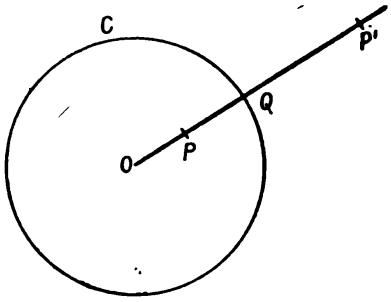


Fig. 60

nu trebuie neapărat să fie diferită de punctul inițial. În deplasarea paralelă, orice punct este transformat într-o imagine diferită de el, dar în rotație sau în dilatare centrul se transformă în el însuși. În cazul simetriei față de o dreaptă, fiecare punct al dreptei este transformat în el însuși.

Aceste exemple au servit pentru a explica ce înțelegem printr-o transformare. Vom descrie acum transformarea numită *inversiune*. Un cerc C cu centrul O, centrul inversiunii, este reprezentat în fig. 60. Pentru a găsi imaginea P' a unui punct P vom duce o rază din O la P. Această rază va intersecta cercul într-un anumit punct Q. Vom defini punctul P' prin condiția ca el să se afle pe rază și să satisfacă condiția $OP : OQ = OQ : OP'$. Dacă notăm cu a raza cercului și scriem $OP = r$, $OP' = r'$, atunci proporția precedentă poate fi înlocuită cu ecuația

$$rr' = a^2.$$

Din definiția inversiunii reiese clar că imaginea oricărui punct din interiorul cercului de inversiune C se află în afara cercului și reciproc. Fiecare punct de pe cercul de inversiune este propria sa imagine. Din această cauză, o inversiune se numește în mod frecvent „simetrie față de cerc". Ca și pentru simetriile obișnuite, inversiunea are proprietatea că imaginea unei imagini este punctul inițial.

4. În ceea ce privește punctele izolate, comportarea unei inversiuni este evidentă după definiție. Probleme noi apar considerînd imaginile curbelor, dar nu putem face aici o tratare completă a subiectului. Rezultatul cel mai important este că orice dreaptă sau cerc se transformă printr-o

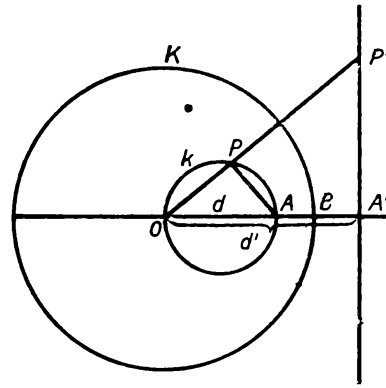


Fig. 61

Inversiune fie într-o dreaptă, fie într-un cerc. Vom avea nevoie numai de o parte din această afirmație, anume că *imaginea unui cerc care trece prin centrul de inversiune este o dreaptă.* Vom demonstra această afirmație.

Fie k un cerc care trece prin O și fie $OA = d$ diametrul său (fig. 61). Cercul de inversiune K are raza a. Imaginea A' a lui A se află pe prelungirea diametrului OA, și distanța $OA' = d'$ trebuie să satisfacă relația $dd' = a^2$. Vom dovedi acum că imaginea lui k este dreapta perpendiculară pe OA', care trece prin A'. Pentru a face acest lucru trebuie să arătăm că orice dreaptă dusă prin O, care intersectează cercul k într-un punct P, întîlnește dreapta în P', astfel încît $OP \cdot OP' = a^2$. Dacă ducem linia AP, se formează două triunghiuri dreptunghice OAP și $OP'A'$ care sînt asemenea, deoarece au un unghi comun în O. Prin urmare avem proporția

$$OP/OA = OA'/OP',$$

sau, cu $OP = r$, $OP' = r'$,

$$rr' = dd'.$$

Folosind relația $dd' = a^2$ avem

$$rr' = a^2,$$

și aceasta este tocmai relația dintre un punct și imaginea sa printr-o inversiune.

Pe lîngă acest fapt, vom avea nevoie, de asemenea, de un rezultat de geometrie elementară. Ducînd două se-

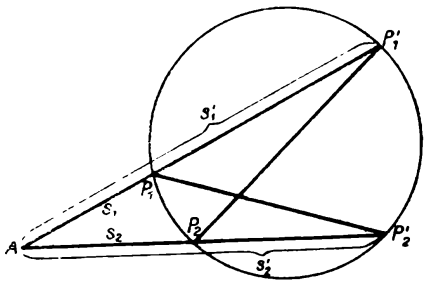


Fig. 62

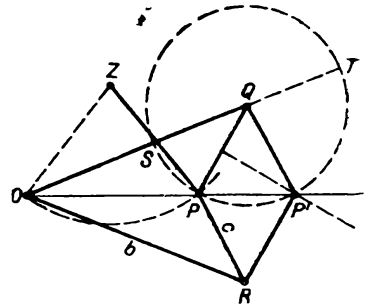


Fig. 63

cante printr-un punct fix exterior unui cerc, produsul distanțelor de la punctul fix la cele două puncte de intersecție ale unei secante cu cercul este egal cu produsul corespunzător celeilalte secante. Cu notațiile din fig. 62, această teoremă se scrie $s_1 s_1' = s_2 s_2'$. Demonstrația sa rezultă direct din asemănarea triunghiurilor AP_1P_2' și AP_2P_1', care au unghiul comun A și în care unghiurile din P_1' și P_2' sînt egale, deoarece subîntind același arc P_1P_2.

5. Cu aceste preliminarii putem să ne întoarcem la inversorul lui Peaucellier (fig. 63). El constă din patru tije de lungime c, articulate pentru a forma un romb $PQP'R$, și două tije de lungime $b > c$, articulate în două vîrfuri opuse Q și R ale rombului. Celelalte capete ale acestor două tije se rotesc în jurul punctului fix O.

Datorită simetriei sistemului de tije, punctele O, P, P' sînt totdeauna în linie dreaptă, axa de simetrie a figurii. Să ducem un cerc din Q cu raza c. Acest cerc trece prin P și P' și întîlnește tija OQ și prelungirea sa în două puncte S și T. OPP' și OST sînt două secante ale cercului cărora le putem aplica teorema de geometrie elementară menționată mai sus. Aceasta ne dă rezultatul

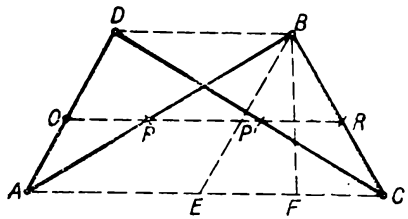
$$OP \cdot OP' = OS \cdot OT = (b - c)(b + c) = b^2 - c^2.$$

Prin urmare, produsul $OP \cdot OP'$ este constant. Dacă notăm $a_2 = b^2 - c^2$, atunci a este cateta unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza b și cealaltă catetă c. Relația $OP \cdot OP' = a^2$ ne arată atunci că P' este imaginea lui P printr-o inversiune de centru O și rază a.

Inversorul lui Peaucellier realizează, prin urmare, o inversiune în porțiunea de plan care poate fi atinsă de P

și P'. Pentru a obține o mișcare rectilinie este suficient să facem ca punctul P să descrie un cerc care trece prin O. Atunci, din ceea ce știm despre inversiune, imaginea P' se va deplasa de-a lungul unei linii drepte. Nu este greu să obligăm punctul P să descrie un cerc. Vom duce o tijă cu capătul în P care se rotește în jurul celuilalt capăt fixat în Z. Pentru a face cercul să treacă prin O trebuie să luăm lungimea tijei ZP egală cu distanța fixă OZ.

Fig. 64



Cu ajutorul acestei tije nou adăugate, inversorul lui Peaucellier constă din șapte tije. Punctul P este constrîns să descrie un arc de cerc care, dacă este luat suficient de mare, trece prin O, și P' se mișcă atunci în lungul unei linii. Această linie va fi perpendiculară pe OZ.

6. S-au găsit și alte mecanisme care produc inversiuni și care pot fi deci utilizate pentru a produce mișcări rectilinii (exact ca și inversorul lui Peaucellier). Unul dintre acestea, imaginat de Hart, necesită numai patru tije, în loc de șase. Cele patru tije sînt unite astfel încît să formeze un paralelogram $ABCD$, dar paralelogramul este îndoit ca în fig. 64. Cu alte cuvinte, întindem de punctele A și C pînă cînd paralelogramul degenerează într-o dreaptă, apoi D și B sînt deplasate de aceeași parte a liniei AC (fig. 64). Cele două „diagonale" AC și DB sînt tot timpul paralele, din cauza egalității triunghiurilor ACB și ACD, prin urmare au înălțimi egale. Acum mecanismul este ținut într-o poziție arbitrară și punctele O, P, P', R sînt marcate pe cele patru tije pe o linie paralelă cu aceea a diagonalelor. Vom arăta acum că *aceste puncte se află totdeauna pe o linie paralelă cu diagonalele*, indiferent de poziția mecanismului.

Dacă, în primul rînd, ne uităm la triunghiul DAB din fig. 64, observăm că OP este paralelă cu DB în poziția inițială a mecanismului. Din această cauză avem

$$AO/OD = AP/PB. \tag{1}$$

Am dovedit relația (1) numai pentru poziția inițială a mecanismului dar, deoarece aceasta este o proporție care cuprinde numai lungimi de segmente, ea rămîne adevărată în orice poziție a mecanismului. Din (1) avem deci $OP \parallel DB$ pentru orice poziție a mecanismului. Privind triunghiul ADC, vedem că OP' este paralelă cu AC în poziția inițială a mecanismului, astfel încît avem

$$DO/OA = DP'/P'C. \tag{2}$$

Această proporție formată cu lungimile segmentelor rămîne adevărată pentru toate pozițiile mecanismului, astfel încît avem $AC \parallel OP'$. Deoarece am dovedit că $OP \parallel DB$, $DB \parallel AC$, $AC \parallel OP'$, rezultă $OP \parallel OP'$, și OP și OP' sînt în prelungire, fiindcă sînt paralele și au un punct comun. Această dreaptă este paralelă cu DB. Un raționament asemănător aplicat triunghiului DCB arată că $P'R \parallel DB$ și vedem că R se află, de asemenea, pe linia care conține pe O, P, P'.

Apoi, din cauza paralelismului celor trei drepte, avem

$$OP/DB = AO/AD,$$

$$OP'/AC = DO/DA.$$

Aceste proporții pot fi înlocuite prin

$$OP \cdot AD = AO \cdot DB, \tag{3}$$

$$OP' \cdot DA = DO \cdot AC. \tag{4}$$

Dacă înmulțim membru cu membru aceste relații și împărțim prin AD^2, obținem

$$OP \cdot OP' = \frac{AO \cdot DO}{AD^2} \cdot AC \cdot DB. \tag{5}$$

În partea dreaptă numerele AO, DO, AD sînt lungimi fixe determinate de aparat, pe cînd AC și DB sînt lungimi ale diagonalelor, care aparent depind de poziția meca-

nismului. *Produsul $AC \cdot DB$ este însă constant*, deoarece ducînd $BE \parallel DA$ și $BF \perp AC$, găsim

$$(6)\quad AC \cdot BD = (AF + FC)(AF - FC) = AF^2 - FC^2.$$

Din triunghiurile dreptunghice AFB și FCB și din teorema lui Pitagora găsim

$$AF^2 + FB^2 = AB^2$$
$$FC^2 + FB^2 = CB^2,$$

și apoi, prin scădere

$$AF^2 - FC^2 = AB^2 - CB^2.$$

Aceasta, împreună cu (6), ne dă

$$(7)\quad AC \cdot BD = AB^2 - CB^2,$$

și partea dreaptă este constantă, independentă de poziția mecanismului. Din (7) și (5) avem

$$(8)\quad OP \cdot OP' = \frac{AO \cdot DO}{AD^2}(AB^2 - CB^2),$$

unde partea dreaptă este o constantă care poate fi determinată făcînd anumite măsurători în mecanism. Deoarece O, P, P' se află pe o dreaptă, punctul P' va fi imaginea lui P într-o inversiune, dacă ținem punctul O fix. Cercul de inversiune are centrul în O și pătratul razei sale este dat de partea dreaptă din (8).

Demonstrația faptului că mecanismul lui Hart produce o inversiune este acum completă. Pentru a produce o mișcare rectilinie, este de ajuns să adăugăm o a cincea tijă care să restrîngă punctul P la un cerc cu centrul în O.

7. Există, de asemenea, mecanisme care produc o mișcare rectilinie fără a utiliza inversiunea. Dublul romboid al lui Kempe (fig. 65) este un aranjament deosebit de ingenios. Prin termenul „romboid" vom înțelege un patrulater în care două perechi de laturi alăturate sînt egale. Într-un romboid, cele două unghiuri formate de două laturi inegale sînt întotdeauna egale. Fie $ABCD$ și $BCEF$ doi romboizi articulați, în care raportul dintre latura mică și cea mare este același și în care latura mare a romboidului mai mic este egală cu latura mică a romboidului mare. În fig. 65 avem $AD = AB$, $CD = CB = CE$, $FB = FE$ și $CB/AD = FB/CB$. Deoarece vîrful F

al romboidului mai mic se află pe o latură a celui mai mare, cei doi romboizi au unghiul din B comun. Prin urmare, unghiurile din B, E și D sînt egale. Se știe că, două patrulatere convexe sînt asemenea dacă laturile sînt proporționale și ele formează unghiuri corespunzătoare egale. Oricum s-ar mișca mecanismul, cei doi romboizi $ABCD$ și $BCEF$ rămîn tot timpul asemenea.

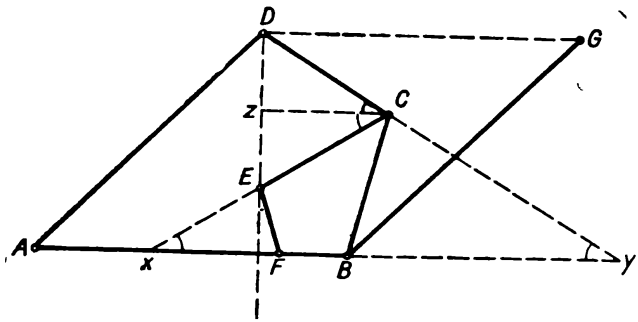


Fig. 65

Dacă două laturi opuse ale unui romboid sînt prelungite pînă se intersectează, ele formează un unghi. Aceste unghiuri, EXF și CYB, sînt evident egale în doi romboizi egali. Dacă ducem $CZ \parallel AB$ prin C, avem $\widehat{DCZ} = \widehat{CYB}$ ca unghiuri corespondente și $\widehat{ZCE} = \widehat{EXF}$ ca unghiuri alterne interne. Rezultă că toate aceste patru unghiuri, care sînt marcate pe figură, sînt egale. Deci, CZ este bisectoarea unghiului ECD în triunghiul CDE, care este isoscel prin ipoteză, astfel încît ea este perpendiculară pe baza DE. Întrucît CZ a fost dus paralel cu AB, linia DE va fi *totdeauna* perpendiculară pe AB.

Acum, fixînd pe D și deplasînd pe AB, astfel încît să rămînă tot timpul paralel cu poziția sa inițială, perpendiculara din D pe AB va rămîne fixă. Dar punctul E se află pe această perpendiculară, astfel încît el nu poate să aibă decît o *mișcare rectilinie* în lungul acestei perpendiculare. Pentru a face ca AB să rămînă tot timpul paralelă cu ea însăși, vom adăuga o tijă BG de lungime $BG = AB = AD$. Vom ține capătul G al tijei fix în punctul determinat de condiția $DG = AB$. Atunci $ABGD$ este un romb, astfel încît laturile sale opuse AB și DG sînt

paralele în toate pozițiile mecanismului. Cu alte cuvinte, AB rămîne tot timpul paralelă cu dreapta *fixă* DG și, prin urmare, este tot timpul paralelă cu ea însăși. Mișcarea rectilinie este prin urmare realizată.

8. Dublul romboid al lui Kempe se poate construi pentru a da o mișcare rectilinie într-un alt mod, deosebit de elegant. Ne vom aproviziona cu două copii $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ ale mecanismului cu dublul romboid, unul fiind imaginea prin simetrie față de o dreaptă a celuilalt. Le vom lega astfel încît să aibă punctul C comun, iar DCE' și $D'CE$ să devină tije rigide care nu se îndoaie în C (fig. 66). Bisectoarea CZ a unghiului DCE este, după cum am văzut, paralelă cu AB și, în mod analog, bisectoarea CZ' a unghiului $D'CE'$ este paralelă cu $A'B'$. Deoarece unghiurile DCE și $D'CE'$ sînt opuse la vîrf prin construcție, cele două bisectoare CZ și CZ' se află în prelungire. Dreptele AB și $A'B'$ sînt paralele cu această dreaptă, astfel încît ele sînt paralele în orice poziție a mecanismului. Mai mult decît atît, dreapta $A'B'$ este întotdeauna în prelungirea segmentului AB. Întrucît știm că cele două linii sînt paralele, tot ce mai rămîne de dovedit este că punctul C este echidistant față de fiecare dintre liniile AB și $A'B'$. Vom face acest lucru arătînd că cei doi romboizi $ABCD$ și $A'B'CD'$ sînt tot timpul egali, în orice poziție a mecanismului. În primul rînd, deoarece unghiurile DCE și $D'CE'$ sînt opuse la vîrf, ele sînt egale. După §7 aceste unghiuri sînt egale cu dublul unghiului dintre două laturi opuse ale fiecărui romboid. Laturile corespunzătoare ale celor doi romboizi sînt egale. Dacă putem arăta acum că un romboid este complet determinat de lungimile laturilor sale și de unghiul dintre o pereche de laturi opuse, atunci cei doi romboizi vor fi egali, deoarece au laturile egale și un unghi egal. Pentru a vedea că un romboid este complet determinat, vom construi rombul $BCDH$ în interiorul romboidului $ABCD$ (fig. 67). Punctele A, H, C se află în linie dreaptă datorită simetriei [1]. Deoarece HB este paralelă cu DC, unghiul ABH este egal cu unghiul dintre două laturi opuse. Prin urmare, el este egal cu jumătate din

[1] Această figură coincide cu aceea a inversorului lui Peaucellier.

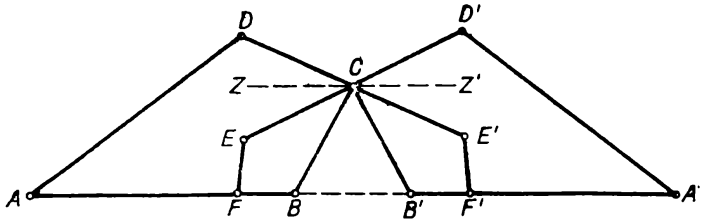


Fig. 66

unghiul DCE din fig. 66. Deoarece AB este dat şi BH este egal cu segmentul BC, triunghiul ABH este complet determinat. Deci D este determinat ca simetric al lui B faţă de AH şi C este determinat ca al patrulea vîrf al rombului $BCDH$, care are trei vîrfuri, B, H, D, deja fixate.

Prin urmare, după cum s-a afirmat, cele două jumătăţi din fig. 66 sînt mereu egale. Rezultă că înălţimea lui C faţă de AB este egală cu înălţimea sa faţă de $A'B'$, şi deci AB şi $A'B'$ sînt în linie dreaptă.

Dacă fixăm acum pe A şi B, tija $A'B'$ se poate deplasa, cu condiţia să rămînă pe linia AB. Am obţinut astfel o mişcare rectilinie cu ajutorul acestui nou mecanism.

Acest mecanism realizează cu mult mai mult decît cele precedente. În mecanismul precedent există un singur punct care se mişcă în linie dreaptă. În acest caz, întreaga tijă $A'B'$ se deplasează rectiliniu. Întrucît orice figură poate fi solidar legată de $A'B'$, acest aparat realizează o deplasare paralelă a oricărei figuri şi chiar a întregului plan, prin care toate punctele se deplasează în lungul unor segmente paralele şi egale.

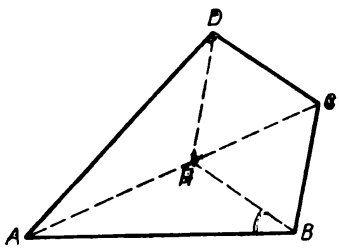


Fig. 67

XIX

Numere perfecte

Cartea a IX-a din *Elementele* lui Euclid este a treia și ultima dintre cărțile consacrate aritmeticii. Ea cuprinde demonstrația infinității șirului numerelor prime, pe care am reprodus-o în capitolul I, și se încheie cu o discuție despre așa-numitele numere perfecte. Numerele perfecte au fost menționate și de Platon, în mod special, într-un pasaj enigmatic din *Republica*, unde, într-o discuție obscură despre eugenie, el introduce „numărul nupțial".

Numerele perfecte și teoremele care vor fi dovedite, referitoare la ele nu constituie astăzi altceva decît o curiozitate pentru matematica modernă. Vom discuta totuși acest subiect minor, datorită metodei folosite de Euclid, care conține în germene, după cum vom vedea în ultimul capitol, ideea, reluată de Euler și dezvoltată ulterior, a unui capitol important din teoria numerelor, teoria modernă a distribuției numerelor prime.

Euclid definește numerele perfecte prin condiția ca un asemenea număr să fie egal cu suma tuturor divizorilor săi. De exemplu, numărul 6 este un număr perfect, deoarece divizorii săi sînt, după cum se vede ușor, 1, 2, 3 și $1 + 2 + 3 = 6$. În această definiție a numerelor perfecte numărul însuși nu trebuie socotit printre divizorii săi. Prin încercări ulterioare se găsește că următorul număr perfect după 6 este $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Următorul număr perfect este prea mare pentru a putea fi găsit prin încercări, dar acest lucru nu este important. Ceea ce căutăm noi de fapt este o metodă generală, sistematică de a găsi numere perfecte.

1. Este clar că un număr prim nu poate fi un număr perfect, 1 și p sînt singurii divizori ai numărului prim p, iar p nu trebuie luat în considerație. Prin urmare, suma tuturor divizorilor este 1, care nu este egal cu p.

2. După ce am considerat acest caz extrem de simplu putem considera un altul, puțin mai complicat. Numărul 9 nu este prim, dar el este un pătrat de număr prim. Încercînd numerele de la 1 la 8, vedem că 1 și 3 sînt singurii divizori care trebuie considerați. Deoarece $1 + 3 = 4$ este mai mic decît 9, numărul 9 nu este perfect.

În mod corespunzător, numerele 1 și p sînt evident divizori ai lui p^2, pătratul numărului prim p. Putem verifica acum, prin încercări, ca și pentru 9, că aceștia sînt singurii divizori ce pot fi luați în considerație. Putem dovedi totuși că acești doi divizori epuizează toți divizorii lui p^2. Acest lucru a fost făcut de Euclid după ce a stabilit cîteva leme. Demonstrația noastră este în esență aceeași cu a lui Euclid, exceptînd modul în care o formulăm. Ea se bazează pe teorema unicității descompunerii în factori primi, dovedită în cap. XI. Dacă p^2 ar avea alți divizori, el ar putea fi descompus și în alt mod decît în $p^2 = p \cdot p$. Ar rezulta că cealaltă descompunere ar cuprinde numere prime diferite de p, și acest lucru este imposibil din cauza unicității descompunerii.

3. Mai general putem arăta în mod similar că nici o putere de număr prim nu poate fi număr perfect. Ca și în cazul lui p^2, vedem că toți divizorii lui p^a, care trebuie considerați, sînt

$$1, p, p^2, \ldots, p^{a-1}. \tag{1}$$

Deoarece aceștia formează o progresie geometrică, suma lor este dată de o binecunoscută formulă, dovedită de Euclid special pentru acest scop. Avem

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{a-1} = \frac{p^a - 1}{p - 1}. \tag{1a}$$

Deoarece numitorul $p - 1$ este egal cu 1 pentru cel mai mic număr prim $p = 2$ și este mai mare pentru toate numerele prime mai mari, fracția din (1a) nu este niciodată mai mare decît numărătorul său $p^a - 1$. Prin urmare, suma divizorilor lui p^a nu este mai mare decît $p^a - 1$. Acest număr

este mai mic decît p^a și, prin urmare, p^a nu este număr perfect.

4. Putem vedea acum cum se comportă numerele asemănătoare cu $72 = 2^3 \cdot 3^2$, care conțin doi factori primi. Vom considera în primul rînd numărul p^3q^2. Divizorii lui p^3q^2 incluzînd numărul p^3q^2 însuși, sînt

$$\begin{array}{c} 1, \quad p, \quad p^2, \quad p^3, \\ q, \quad qp, \quad qp^2, \quad qp^3, \\ q^2, \quad q^2p, \quad q^2p^2, \quad q^2p^3, \end{array} \tag{2}$$

adică toate numerele de forma $p^\alpha q^\beta$, unde α ia valori pînă la 3, iar β pînă la 2. Este evident că toate aceste numere divid pe p^3q^2. Rezultă, de asemenea, din teorema unicității descompunerii în factori primi, că aceștia sînt *singurii* divizori. Tabelul (2) ne dă imaginea completă a tuturor divizorilor numărului nostru. Pentru a găsi suma divizorilor, observăm că al doilea rînd nu este altceva decît primul înmulțit cu q, iar al treilea este egal cu primul înmulțit cu q^2. Suma numerelor din primul rînd este suma progresiei geometrice $1 + p + p^2 + p^3$, astfel încît suma totală a divizorilor este această sumă adunată cu produsul său prin q și apoi adunată cu produsul său prin q^2. Deci, această sumă este

$$D = (1 + q + q^2)(1 + p + p^2 + p^3).$$

Analog, suma divizorilor lui $N = p^a q^b$ este

$$D = (1 + q + q^2 + \ldots + q^b)(1 + p + p^2 + \ldots + p^a) = \tag{2a}$$

$$= \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1},$$

dar în aceste formule am inclus printre divizori și numărul N.

5. Acest ultim rezultat poate fi generalizat la un număr N conținînd mai mult de doi factori primi. Deoarece $N = p^a q^b r^c$, pe lîngă un tabel asemănător cu (2), vom avea acest tabel înmulțit cu r și apoi cu r^2 ș.a.m.d., pînă la r^c.

În total, tabelul este înmulțit cu $(1 + r + r^2 + \ldots + r^c)$. Dacă N are încă un factor prim, atunci suma divizorilor are încă un factor asemănător. În general, pentru $N = p^a q^b r^c \ldots$, suma divizorilor este

$$\begin{aligned} D = {} & (1 + p + p^2 + \ldots + p^a)(1 + q + q^2 + \ldots \\ & \ldots + q^b)(1 + r + r^2 + \ldots + r^c) \ldots = \\ & = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \frac{r^{c+1} - 1}{r - 1} \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

unde, din nou, am inclus și pe N printre divizori.

6. În esență, toate aceste considerații se află în *Elementele* lui Euclid, dar numai pentru cazul $N = p \cdot 2^b$. În acest caz, N este un produs de doi factori, unul o putere a lui 2, celălalt un număr prim p la puterea întîi, deci formula (2a) devine

$$D = \frac{2^{b+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^2 - 1}{p - 1}.$$

Dacă N este un număr perfect, atunci $D = 2N$, deoarece N se află printre divizori, și

$$D = (2^{b+1} - 1)(p + 1) = 2N.$$

Introducînd valoarea lui N, găsim

$$\begin{aligned} & (2^{b+1} - 1)(p + 1) = 2 \cdot p \cdot 2^b = 2^{b+1} p, \\ & 2^{b+1}(p + 1) - (p + 1) = 2^{b+1} p, \\ & 2^{b+1} = p + 1, \\ & p = 2^{b+1} - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Prin urmare, dacă p nu este numai un număr prim, dar este totodată de forma $2^{b+1} - 1$, atunci N este număr perfect. Numărul $2^{b+1} - 1$ nu este prim pentru orice valoare a lui b. Avem următoarea teoremă a lui Euclid:

Numărul $N = (2^{n+1} - 1) \cdot 2^n$ *este număr perfect pentru orice număr* n, *pentru care* $2^{n+1} - 1$ *este prim.*

7. Să considerăm valorile $n = 1, 2, 3, \ldots$ cu scopul de a găsi cîteva numere perfecte consecutive:

$n = 1, N = (2^2-1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6,$
$n = 2, N = (2^3-1) \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28,$
$n = 3, N = (2^4-1) \cdot 2^3 = 15 \cdot 8$ neperfect, 15 neprim,
$n = 4, N = (2^5-1) \cdot 2^4 = 31 \cdot 16 = 496,$
$n = 5, N = (2^6-1) \cdot 2^5 = 63 \cdot 32$ neperfect, 63 neprim,
$n = 6, N = (2^7-1) \cdot 2^6 = 127 \cdot 64 = 8\,128.$
. . . . . .

Teorema lui Euclid ridică imediat o nouă problemă: *Pentru ce valori ale lui n numărul* $2^{n+1}-1$ *este prim*? Un *prim* pas către soluție poate fi făcut imediat. Dacă $n+1$ este un număr compus, să spunem $n + 1 = u^v$, atunci avem $2^{n+1} - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1$. Aplicînd formula sumei progresiei geometrice, obținem

$$x^v - 1 = [x^{v-1} + x^{v-2} + \ldots + x + 1][x - 1],$$

și punînd $x = 2^u$, obținem

$$(2^u)^v - 1 = [(2^u)^{v-1} + \ldots + (2^u) + 1][(2^u) - 1],$$

un produs de doi factori. Prin urmare, $2^{n+1} - 1$ nu poate fi prim decît dacă $n+1$ este el însuși prim. În continuarea tabelului de mai sus, următorul număr prim după 7 este 11, astfel încît următoarea valoare care trebuie încercată este $n = 10$. Întrucît $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$ nu este prim, numărul $(2^{11} - 1) \cdot 2^{10}$ nu este perfect, dar descompunerea lui 2 047 necesită un număr considerabil de încercări. Au fost găsite mai multe numere perfecte ulterioare, dar nu s-a găsit nici o regulă completă de a le determina pe toate. O altă problemă care a rămas nerezolvată este dacă există o infinitate de asemenea numere perfecte sau dacă numărul acestora este finit.

8. Rezultatul lui Euclid nu merge mai departe decît teorema precedentă, dar există mai multe dovezi că pe acea vreme se știa mai mult. În primul rînd, Iamblichos afirmă, fără demonstrație, că nu există alte numere pare perfecte decît acelea date de Euclid. Nu se știe dacă acest fapt a fost dovedit de antici sau, în caz afirmativ, în ce mod s-a făcut acest lucru. Totuși, Euler a dat o demonstrație bazată pe formula (3); și această formulă

este, în esență, cuprinsă în opera lui Euclid. Cu toate că această demonstrație nu este importantă pentru subiectele care urmează, o vom reproduce totuși.

Fie N un număr par. Atunci 2 este unul dintre factorii primi ai lui N și el apare la o anumită putere, să spunem, 2^n. Factorii primi ai lui N care rămîn sînt impari, și împreună reprezintă un număr impar u. Prin urmare, avem $N = 2^n u$. Dacă formăm suma divizorilor D ai lui N, conform cu (3), primul factor este

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

și al doilea factor este exact ceea ce ar apărea dacă s-ar folosi (3) pentru a găsi suma U a divizorilor lui u. Vom avea

$$D = (2^{n+1} - 1)\, U, \tag{5}$$

care trebuie să fie egal cu $2N$ dacă N este perfect, deoarece am inclus printre divizori și pe N. Astfel, dacă N este număr perfect, găsim

$$\begin{aligned} &(2^{n+1} - 1)U = 2N = 2 \cdot 2^n u = 2^{n+1} u, \\ &2^{n+1} U - U = 2^{n+1} u, \\ &2^{n+1}(U - u) = U = (U - u) + u, \\ &(2^{n+1} - 1)\,(U - u) = u. \end{aligned} \tag{6}$$

Acum U este suma divizorilor lui u, inclusiv u, astfel încît $U - u$ este suma divizorilor lui u, *cu excepția* lui u însuși. De asemenea, (6) implică faptul că $(U - u)$ divide pe u dacă N este un număr perfect, adică $(U - u)$ este un divizor a lui u. Dacă $U - u$ este un divizor și totodată suma tuturor divizorilor, atunci el trebuie să fie *singurul* divizor al lui u. Deoarece 1 este cu siguranță divizor al lui u, el trebuie să fie egal cu acest unic divizor $U - u$, și u trebuie să fie prim. Prin urmare, (6) revine la $u = 2^{n+1} - 1$, ceea ce arată că $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$, adică orice număr perfect par este de forma dată de Euclid.

9. În acest punct întîlnim o a doua problemă: *există numere perfecte impare?* Această problemă este de asemenea nerezolvată. Nu s-a putut găsi nici un număr perfect impar și pare puțin probabil ca asemenea numere să existe, dar faptul nu a fost dovedit.

10. Un pasaj din cartea a V-a a lui Platon, *Legile*, ne conduce, de asemenea, la presupunerea că Euclid nu a inclus în demonstrația dată tot ceea ce se știa pe vremea sa. Platon recomandă ca într-o cetate nou înființată numărul parcelelor și al proprietarilor de pămînt să fie alese astfel încît să aibă un număr cît mai mare de divizori posibili, probabil 5 040 cu 60 — 1 divizori. El subliniază că legislatorii trebuie să cunoască suficient de multă aritmetică pentru a putea aranja acest lucru pentru cetăți de orice mărime. Aceasta ridică problema *numărului* de divizori ai unui număr arbitrar. Pentru a o rezolva putem folosi o parte din discuția noastră relativă la *suma* tuturor divizorilor. De exemplu, *toți* divizorii lui p^3q^2 sînt incluși în tabelul (2) și putem să-i numărăm pe rînduri, $3 \cdot 4 = 12$. Acest număr include pe p^3q^2 însuși, astfel încît trebuie să scădem 1 pentru a obține numărul divizorilor proprii $12 - 1$. Mai general, pentru $N = p^a q^b$ numărul divizorilor proprii ai lui N este

$$P = (a + 1)(b + 1) - 1$$

și, pentru cazul cel mai general, $N = p^a q^b r^c \ldots$, el este

$$P = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \ldots - 1.$$

În particular, pentru $N = 5\,040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ avem

$$P = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 60 - 1.$$

Aceasta explică, probabil, folosirea de către Platon a notației neobișnuite și stîngace 60—1 în loc de 59; și această notație, împreună cu instrucțiunile sale că legislatorii trebuie să cunoască soluția acestei probleme, ne face să credem că el cunoștea această soluție.

11. Legătura strînsă între numărul divizorilor și suma divizorilor unui număr devine mai vizibilă concepînd aceste două numere drept cazuri particulare ale unui

subiect general. Acesta constă în a găsi suma S a puterilor de gradul s a divizorilor unui număr N. De exemplu, pentru $N = 6$ avem $S = 1^s + 2^s + 3^s$. Pentru $s = 1$, S este tocmai suma D a divizorilor proprii ai lui N, iar pentru $s = 0$ fiecare termen din sumă este egal cu 1, și S este numărul P al divizorilor proprii ai lui N. Pentru $s = 2$ se obține suma pătratelor divizorilor proprii ai lui N ș.a.m.d. Pentru orice valoare a lui s se poate da o formulă analogă cu (3) printr-un raționament asemănător. Valoarea $s = -1$ poate fi folosită ca și orice altă valoare. Puterile -1 sînt inversele divizorilor; astfel, pentru $N = 6$, S este

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Formula similară cu (3) pentru suma inverșilor divizorilor lui N este evident

$$R = \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^a}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^b}\right) \times \left(1 + \frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{r^c}\right) \ldots . \tag{7}$$

Toate aceste sume constituie o parte dintr-o singură teorie care provine din faptul că un tabel ca (2) ne dă o listă completă a tuturor divizorilor unui număr. Astfel baza acestei teorii era cunoscută anticilor și dovada din Platon pare să indice că ei au cunoscut frumusețea și importanța sa.

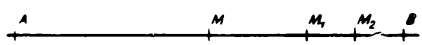
XX

Demonstrația lui Euler a existenței unui număr infinit de numere prime

Demonstrația lui Euclid a infinității numerelor prime, dată în capitolul I, precede imediat considerațiile sale despre numere perfecte. Euler, care a reluat și a extins studiul numerelor perfecte, a dat o altă demonstrație a infinității numerelor prime. Această demonstrație folosește ideile care stau la baza teoriei numerelor perfecte.

Vom face două observații simple înainte de a expune demonstrația.

1. Fie AB un segment de dreaptă de 2 cm.



Dacă împărțim acest segment în două cu ajutorul punctului M și apoi luăm mijlocul M_1 al lui MB și apoi mijlocul M_2 al lui M_1B etc., ne rămîne întotdeauna un segment pînă la B, dar ne apropiem în mod continuu de B. Vom parcurge distanțe de lungime egală cu 1 cm, $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm ș.a.m.d. Aceste distanțe vor totaliza împreună mai puțin de 2 cm:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Dacă segmentele descresc continuu cu altă rație $x < 1$, în loc de $\frac{1}{2}$ proprietatea de mai sus rămîne adevărată.

Pentru a demonstra aceasta vom folosi din nou formula sumei progresiei geometrice

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Deoarece x este mai mic decît 1, a doua fracție din dreapta este un număr pozitiv care se scade din prima fracție, astfel încît avem

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n < \frac{1}{1 - x}.$$

Dacă p este un număr prim arbitrar, atunci $\frac{1}{p} < 1$, și putem înlocui în inegalitatea noastră x prin $\frac{1}{p}$. Putem afirma atunci că *dacă p este un număr prim arbitrar și n este un număr întreg*, atunci

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p - 1}.$$

2. Dacă scriem

$$A_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

atunci

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > A_2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16} > A_3 + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) > 1 + \frac{4}{2},$$

și,în general,

$$(2) \qquad A_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m} > 1 + \frac{m}{2}.$$

Cu cît m este mai mare, cu atîta A_m devine mai mare, și A_m poate fi făcut oricît de mare dorim, dacă luăm pentru m valori suficient de mari. De exemplu, este suficient să luăm $m = 1\,998$ pentru a obține $\frac{m}{2} = 999$ și deci $A_m > 1\,000$. În mod analog, putem lua pe m suficient de mare pentru a face ca A_m să fie mai mare decît un milion [1].

3. Să luăm p un număr prim arbitrar și să scriem inegalitatea (1) pentru fiecare dintre numerele prime 2, 3, 5, ..., pînă la p:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2-1},$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} < \frac{3}{3-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} < \frac{p}{p-1}.$$

Să formăm produsul R_p al tuturor acestor sume. El va fi inferior produsului M_p format cu membrii din partea dreaptă,

$$R_p < M_p = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \ldots \frac{p}{p-1}.$$

---

[1] Rezultă de aici că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ crește dincolo de orice limită, pe măsură ce n crește (aici n nu este restrîns la a fi o putere a lui 2 dar, întrucît crește, el va depăși orice putere a lui 2 dată). În matematică acest lucru se exprimă spunînd că „seria infinită $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ diverge", deși termenii săi devin din ce în ce mai mici. Acest fapt important, ca și ideea convergenței și aceea a proceselor infinitezimale nu sînt însă cuprinse în tratarea de față.

Sîntem obișnuiți din capitolul precedent cu produse de forma lui R_p. Dacă îi înmulțim, R_p apare ca suma tuturor termenilor de forma

$$\frac{1}{2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{3^{\beta}} \cdot \ldots \frac{1}{p^{\mu}},$$

unde fiecare dintre α, β, ..., μ ia toate valorile pînă la n. Cu alte cuvinte, R_p este suma inverșilor tuturor divizorilor lui

$$N = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \ldots p^n.$$

Prin urmare, R_p este o sumă de numere întregi inversate, dar nu a tuturor numerelor întregi posibile. Singurele numere care apar sînt acelea formate din factorii primi 2, 3, 5,..., p, și fiecare dintre aceste numere apare la o putere care nu depășește pe n. De exemplu,

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) = 1 +$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$

este suma inverșilor tuturor divizorilor lui $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

4. Să trecem la demonstrația propriu-zisă. Fie n un număr întreg pozitiv. Atunci A_m este suma inverșilor tuturor numerelor

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2^m. \tag{3}$$

Să considerăm toate numerele prime care divid numerele din (3), și fie q cel mai mare dintre acestea. Atunci, toate numerele (3) sînt produse care cuprind numai factorii primi 2, 3, 5, ..., q. Rezultă că nici unul dintre aceste numere prime nu poate apărea la o putere mai mare decît m, deoarece dacă cel mai mic număr prim 2 apare într-un număr la o putere mai mare decît m, atunci acel număr este mai mare decît 2^m și, prin urmare, nu apare în șirul (3). Ceea ce este adevărat pentru 2 este cu siguranță adevărat pentru numere prime mai mari. Astfel, *numerele din (3) sînt incluse printre divizorii numărului* $2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \ldots q^n$.

Acum, dacă formăm produsul R_p din § 3, nu pentru un număr p arbitrar, ci pentru numărul prim particular q, și luăm m în loc de n, el va cuprinde *toți* termenii lui A_m. Expresia R_q va conține alți termeni decît aceia ai lui A_m, dar important este faptul că toți termenii din A_m se găsesc printre aceia ai lui R_q. În legătură cu exemplul de la sfîrșitul § 3, vedem că *toți* termenii lui $A_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ sînt incluși împreună cu diferiți alți termeni.

În virtutea acestei relații dintre A_m și R_q avem $A_m < R_q$. Rezultă din § 3 că $R_q < M_q$ și $1 + \frac{m}{2} < A_m$ din (2). Combinînd aceste inegalități obținem

$$1 + \frac{m}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{q}{q-1}. \tag{4}$$

Dar m a fost un număr întreg pozitiv arbitrar, iar q cel mai mare dintre factorii primi ai numerelor din (3). Partea stîngă din (4) poate fi făcută oricît de mare, alegînd m suficient de mare. Dacă ar exista numai un număr finit de numere prime, q ar putea să crească numai pînă la ultimul număr prim, dar nu mai mult. Ar însemna că partea dreaptă din (4) poate crește pînă la o anumită valoare și apoi ar rămîne constantă. Aceasta ar contrazice faptul că partea stîngă poate fi făcută oricît de mare; prin urmare, s-a dovedit astfel că există o infinitate de numere prime.

Această demonstrație este cu mult mai complicată decît aceea din capitolul I, dar importanța sa constă în faptul că aceleași metode pot fi folosite într-un număr mare de probleme asemănătoare, mult mai grele, dintre care cîteva au fost menționate în capitolul I. Aceste metode constituie baza teoriei distribuției numerelor prime, una dintre cele mai mari și dificile ramuri ale matematicii moderne. Cel puțin în esență, această teorie ne-a fost transmisă de antici.

XXI

Principii de bază ale problemelor de maxim

Am discutat în repetate rînduri probleme de maxim. În capitolele III, V și VI am înfățișat cîteva miniaturi matematice create de matematicieni deosebit de talentați, pe lîngă opera lor importantă și mult mai amplă. În acest capitol vom discuta anumite principii care stau la baza tuturor acestor probleme.

Aceste principii pot fi dezvoltate, considerînd un număr extrem de simplu de probleme de maxim. *Fie dat un triunghi* (este preferabil să-l considerăm ca fiind decupat din hîrtie). Se pune problema de *a găsi două puncte P și Q, cît mai distanțate cu putință, pe suprafața sau pe laturile acestuia* (fig. 68). Răspunsul este ușor de găsit: *P* și *Q* sînt capetele laturii celei mai mari. Cum se poate însă dovedi acest lucru?

Există o metodă simplă, o rețetă pe care nu am folosit-o în capitolele precedente. Ea ne va permite să răspundem la această problemă, ca și la altele. Argumentăm astfel: Dacă unul dintre puncte, să spunem *P*, se află în *interiorul* triunghiului, atunci *PQ* nu va avea, cu siguranță, lungimea maximă, deoarece în prelungirea segmentului *PQ* există un punct P_1, care este mai depărtat de *Q* decît *P* și este situat tot în interiorul triunghiului. Dacă ambele puncte *P* și *Q* se află pe laturile triunghiului, dar unul dintre ele nu este vîrf, atunci putem găsi un punct

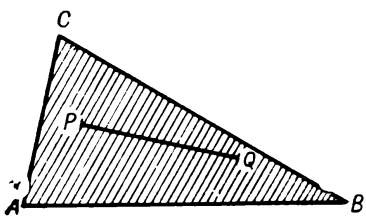
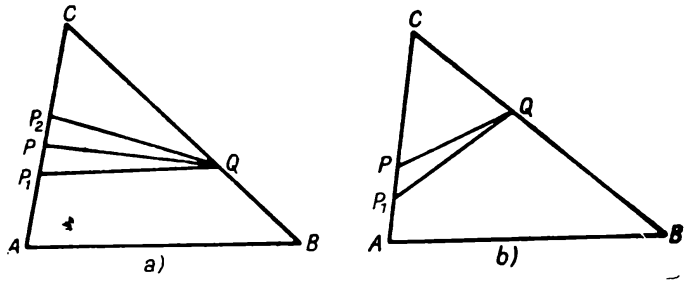


Fig. 68

Fig. 69



P_1 apropiat de P situat pe laturile triunghiului, mai depărtat de Q decît P. Acest lucru este clar cînd PQ este perpendicular pe latura pe care se află P (fig. 69 a), ca și în cazul cînd PQ nu este perpendicular pe această latură (fig. 69 b). Prin urmare, PQ poate fi maxim dacă și numai dacă ambele puncte P și Q sînt vîrfuri. Rezultă că PQ este o latură a triunghiului și ea trebuie să fie, evident, cea mai mare latură.

Același argument ne va da rezultatul corespunzător pentru un poligon: *pentru ca două puncte de pe suprafața unui poligon să fie depărtate cu cea mai mare distanță posibilă, ele trebuie să fie două dintre vîrfurile cele mai îndepărtate.* În acest rezultat, poligonul nu trebuie să fie neapărat convex. În patrulaterul din fig. 70, cele două vîrfuri de jos sînt punctele cele mai depărtate.

Problemele de maxim din capitolele precedente pot fi tratate în mod asemănător. Acest principiu ne conduce la rezultat mult mai repede decît metodele date în aceste capitole. De exemplu, pentru a găsi cel mai mare triunghi înscris într-un cerc dat (fig. 71) presupunem că ACB nu este echilateral. Dacă AC și BC sînt inegale, vom înscrie în cerc triunghiul isoscel ABD, cu baza AB. Noul triunghi are o înălțime mai mare decît triunghiul inițial, astfel încît el are o arie mai mare. Prin urmare, un triunghi care nu este echilateral nu poate fi maxim; triunghiul maxim trebuie să fie echilateral. Aceleași metode se aplică și în cazul triunghiului format cu picioarele înălțimilor.

Se pune în mod firesc întrebarea de ce am recurs atunci la demonstrații mult mai lungi și mai complicate în capitolele precedente? De ce nu ne-am mulțumit cu demonstrații ca cele de mai sus, mult mai scurte? Motivul este

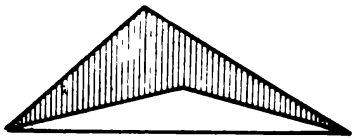


Fig. 70

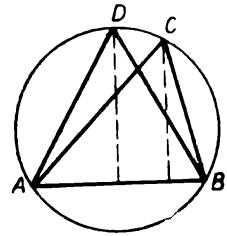


Fig. 71

că acest procedeu are un defect logic important. Acest defect a trecut neobservat timp de două secole, pînă cînd Weierstrass l-a pus în evidență, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea.

Defectul va deveni evident dacă aplicăm acest principiu unui alt exemplu (fig. 72). Deoarece planul este infinit, este clar că nu există, în această figură, două puncte situate la distanța maximă; cu cît punctul P se deplasează spre dreapta, cu atît mai mare devine distanța MP. Totuși, argumentul precedent poate fi invocat ca și mai înainte. Să presupunem că P și Q se află într-o poziție arbitrară în interiorul figurii sau pe frontieră, incluzînd și posibilitatea ca ele să coincidă cu unul dintre vîrfurile A, B, C, D. În afară de cazul în care PQ coincide cu latura AB, se poate găsi un punct apropiat P_1 care să mărească distanța PQ. Ca și în cazurile precedente, pentru fiecare pereche de puncte P, Q putem găsi o pereche apropiată mai distanțată, exceptînd cazul în care perechea este A, B. Nici o pereche în afară de A, B nu poate fi maximă. Dacă urmăm acum argumentul precedent, în mod riguros, ar trebui să conchidem că AB este maxim.

În acest ultim caz am obținut un rezultat evident incorect, folosind exact aceleași principii. Cum putem fi siguri că răspunsul obținut pentru triunghi este corect?

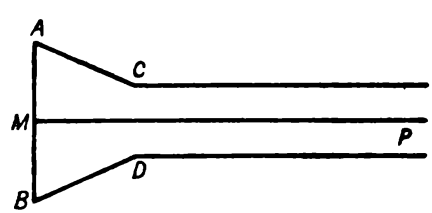


Fig. 72

Defectul metodei este următorul: în cazul triunghiului am demonstrat faptul adevărat că nici o pereche de puncte, în afară de capetele laturii celei mai lungi, nu

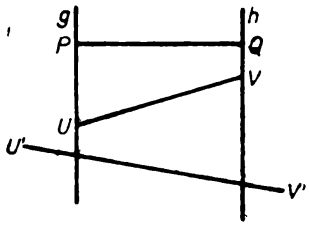


Fig. 73

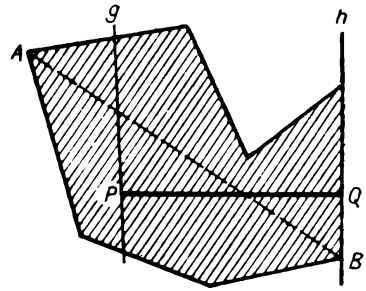


Fig. 74

poate să fie maximă. Dar, acest lucru nu ne spune că aceste puncte sînt mai îndepărtate decît alte puncte din triunghi. Dacă știm că există o soluție a problemei de maxim, putem conchide logic că tocmai aceasta este perechea de puncte, deoarece nu există altă posibilitate. Dar, trebuie să știm că există o soluție. În cazul fig. 72, dacă ar exista o soluție, ea ar trebui să fie AB dar, în acest caz, nu avem nici o soluție.

Este clar acum de ce nu am fost în stare să evităm demonstrațiile aparent greoaie din capitolele precedente. Ele au fost nu numai preferabile, pentru motive de ordin estetic, ci și necesare, pentru a evita o greșeală logică gravă. Pentru a încheia acest capitol mai rămîne să completăm demonstrația referitoare la fig. 68.

Vom face întîi o observație extrem de elementară: dacă se dau două drepte paralele g și h (fig. 73), atunci perpendiculara PQ este cel puțin la fel de scurtă ca și orice alt segment UV care unește un punct de pe o dreaptă cu un punct de pe cealaltă. De asemenea, PQ este mai scurt decît orice segment $U'V'$, care unește un punct U' din stînga lui g cu un punct V' din dreapta lui h.

În loc de a ne limita la un triunghi, putem să facem demonstrația pentru un poligon arbitrar.

Fie P și Q două puncte din interiorul poligonului sau de pe frontieră. Vom duce cele două perpendiculare g, h la segmentul PQ în capetele sale (fig. 74). Aceste două drepte taie o porțiune din întreaga figură. Acum, deoarece cel puțin punctul P al poligonului se află pe g, un vîrf A al poligonului trebuie să se afle la stînga lui g sau eventual pe g. De asemenea, un alt vîrf B trebuie să se afle

la dreapta sau, eventual, pe h. Distanța AB nu este mai mică decît PQ și, prin urmare, PQ nu este mai mare decît cea mai mare dintre distanțele dintre două vîrfuri ale poligonului. Prin urmare, această ultimă distanță este maximă.

În capitolul următor vom considera o problemă de maxim mult mai dificilă decît oricare dintre problemele precedente. Ea constă în a găsi o figură, mărginită de linii sau curbe, avînd un perimetru dat și care să aibă aria maximă. Vom demonstra că unica soluție posibilă este un cerc, dar nu vom încerca să dovedim că cercul are chiar aria maximă între toate celelalte figuri. Această problemă este complicată prin faptul că se iau în considerație figuri curbe. Din acest motiv, va trebui să folosim o serie de idei și fapte noi pentru a obține chiar și acest rezultat restrîns.

XXII

Figura de arie maximă și perimetru dat

De ce baloanele de săpun au forma sferică? Deoarece pereții lor sînt formați dintr-o substanță supusă forțelor de coeziune, care caută să micșoreze suprafața pereților. Presiunea aerului din exterior nu trebuie luată în considerație, dar aerul din interior își păstrează volumul, pe cînd aria devine cît se poate de mică. Baloanele de săpun rezolvă, prin urmare, problema de a găsi figura solidă de volum dat, care să aibă cea mai mică suprafață.

Problema pe care o vom rezolva este mai modestă decît aceea rezolvată de orice balon de săpun și de orice picătură de ploaie. În loc de a considera figuri din spațiu, ne vom restrînge la figuri plane și vom căuta figura de perimetru minim și arie dată.

1. Ne-am propus să găsim figura de perimetru minim și arie dată, pe cînd titlul acestui capitol se referă la o figură de *arie* maximă și perimetru dat. Deosebirea este numai aparentă. Pentru a face acest lucru clar, să presupunem că nu cercul K de perimetru k (fig. 75), ci figura F de perimetru f are aria maximă. Atunci, avem $f = k$ și $F > K$. Să contractăm figura F proporțional, alegînd un punct O în interiorul său și ducînd dreptele OA, OB, OC, ... din O spre frontieră și apoi micșorînd fiecare din aceste segmente într-un raport dat. Putem alege acest raport astfel încît figura contractată F', cu perimetrul f', să aibă aceeași arie ca și K. Acest lucru micșorează perimetrul astfel încît avem $f' < k$ și, prin urmare, F' este o figură cu aceeași arie ca și cercul, dar de perimetru mai mic. Dovedind că acest lucru este imposibil, problema care constituie titlul capitolului de față va fi de asemenea

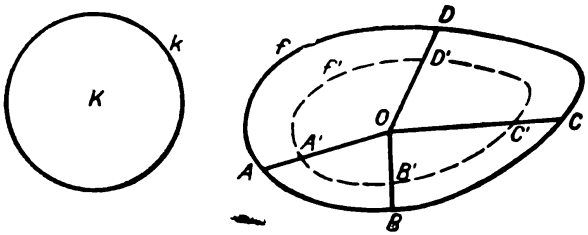


Fig. 75

rezolvată, și soluția sa este cercul. Deoarece în mod analog se poate dovedi și reciproca, cele două formulări sînt echivalente.

2. Am folosit implicit următoarea teoremă privitoare la perimetrul și aria unei figuri.

a. *Dacă o figură este contractată proporțional în jurul unui punct O, cu raportul 1/r, atunci perimetrul se micșorează în același raport 1/r, iar aria este micșorată în raportul* $1/r^2$.

Vom folosi diferite alte teoreme referitoare la perimetrele și ariile figurilor și nu ne vom pune problema de a le demonstra. Aceasta ar cere o analiză a sensului exact al tuturor conceptelor utilizate și, prin urmare, ar necesita o teorie completă. Cum scopul nostru nu este de a face acest lucru, vom menționa teoremele pe care le vom folosi, fără a da demonstrațiile.

b. *Dacă suprafața unei figuri este o parte din suprafața alteia, atunci ea are o arie mai mică decît a celeilalte* (fig. 76). Afirmația similară relativă la perimetrul unei figuri *nu* este adevărată. Acest lucru poate fi ilustrat prin fig. 77, unde curba interioară are suficient de multe ondulări. Teorema este totuși adevărată dacă ne limităm la figuri *convexe.*

O figură se numește convexă dacă oricare două puncte ale figurii pot fi unite printr-un segment situat în întregime în figură. Un cerc, ca și orice triunghi sînt figuri convexe, pe cînd fig. 78 nu este, deoarece P și Q sînt interioare, dar segmentul care le unește nu este în întregime cuprins în figură.

c. *Dacă o curbă convexă cuprinde în interiorul său o altă curbă convexă, atunci curba exterioară are perimetrul mai mare* (fig. 76).

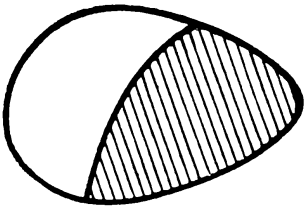


Fig. 76

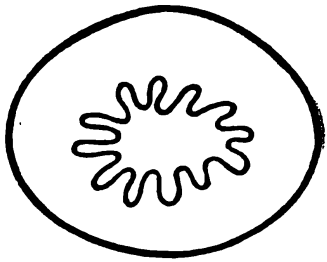


Fig. 77

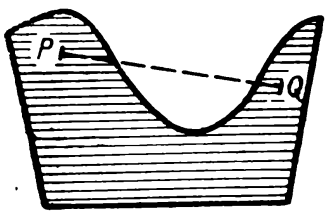


Fig. 78

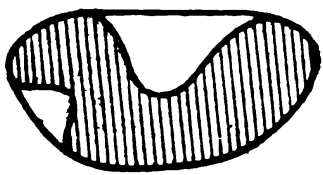


Fig. 79

d. *Orice figură neconvexă poate fi înconjurată cu o figură convexă de arie mai mare și de perimetru mai mic* (fig. 79).

Aceste patru teoreme, pe care le vom accepta fără demonstrație, sînt evidente din punct de vedere intuitiv, exceptînd eventual teorema c; am văzut însă că evidența intuitivă nu are o importanță prea mare.

3. Sîntem acum în situația de a începe demonstrația, după J. Steiner. Vom demonstra întîi că *curba de arie maximă și perimetru dat trebuie să fie convexă.* Acest lucru rezultă direct din teoremele d și a. Dacă înconjurăm curba conform teoremei d, vom obține o figură convexă cu perimetru mai mic și cu arie mai mare. Dacă dilatăm acum figura obținută cu un raport convenabil pentru a obține perimetrul inițial, aria se mărește, conform teoremei a. Am construit o curbă convexă cu același perimetru, dar cu o arie mai mare. Prin urmare, printre curbele de perimetru dat, o curbă care nu este convexă nu poate să aibă aria maximă.

4. Vom considera de acum încolo numai figuri convexe. Demonstrăm mai întîi că *pentru orice figură convexă*

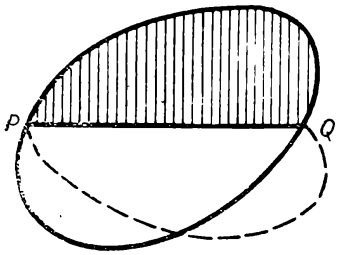


Fig. 80

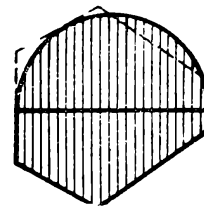


Fig. 81

există o figură convexă de perimetru egal și de arie cel puțin la fel de mare, care admite o axă de simetrie.

Fie P un punct de pe curbă (fig. 80) și fie Q un punct de pe curbă a cărui distanță la P, măsurată de-a lungul curbei, este exact jumătate din perimetru. Coarda PQ împarte figura în două părți. Dacă aceste părți au arii diferite, atunci vom alege partea cea mai mare și vom considera figura simetrică ei față de dreapta PQ; dacă ele au aceeași arie, vom alege pentru a face simetrica față de PQ, una, arbitrară, dintre aceste părți. Această parte și simetrica sa formează o figură cu același perimetru ca și figura inițială și aria cel puțin la fel de mare. Apoi, această figură are o axă de simetrie. Dacă figura nu este convexă, ea poate fi făcută convexă folosind teoremele d și a, așa cum s-a procedat în § 3. Acest lucru va face cel mult să crească aria și este ușor de văzut că nu va distruge simetria.

Astfel, am demonstrat afirmația, dar ne mai rămîne un punct de menționat. Dacă figura inițială este un cerc, atunci PQ este un diametru și figura obținută prin simetrie este cercul însuși. Dacă figura inițială nu este un cerc, atunci cel puțin una dintre aceste părți în care PQ împarte figura noastră nu este un semicerc (fig. 81). Dacă o parte este mai mare decît cealaltă, atunci figura nou obținută prin simetrie are o arie mai mare. Dacă cele două părți ar avea arii egale, atunci vom alege pe aceea care *nu* este un semicerc. Atunci noua figură nu va fi un cerc. Dacă noua figură nu este convexă, o putem rotunji, aplicînd teoremele d și a, mărind din nou aria sa. Prin urmare, putem spune acum fie că există o figură de arie mai mare, cu același perimetru, fie că noua figură este convexă și

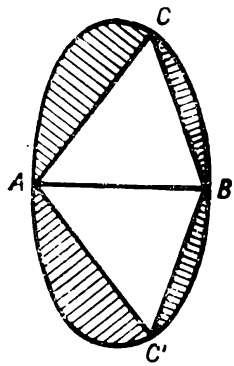


Fig. 82

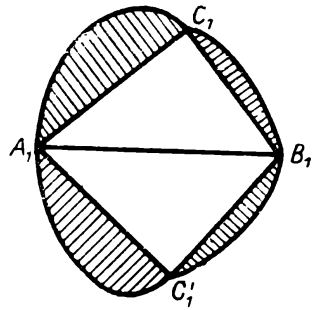


Fig. 83

are aceeași arie și perimetru, ca și figura inițială. În plus, noua figură este un cerc numai dacă figura inițială este cerc.

5. Dacă figura inițială nu este un cerc, putem să o „îmbunătățim" sau să o înlocuim cu o figură convexă, cu aceeași arie și perimetru, o figură care să admită o axă de simetrie, dar să nu fie cerc. Dacă figura poate fi „îmbunătățită", ea nu este, cu siguranță, un maxim.

Vom arăta acum că dacă o figură convexă cu o axă de simetrie nu este un cerc, putem construi o altă figură convexă cu același perimetru și cu o arie, cu siguranță, mai mare. Acest lucru va încheia demonstrația, deoarece atunci va fi dovedit că orice figură care nu este un cerc poate fi „îmbunătățită".

Dacă AB este axa de simetrie (fig. 82), atunci trebuie să existe un punct C pe frontieră, care face un unghi ACB *diferit* de un unghi drept. Dacă orice punct ar forma un unghi drept, atunci, în conformitate cu o teoremă binecunoscută (fig. 81), curba ar fi un cerc cu diametrul AB, și noi am presupus contrariul.

Vom construi acum un triunghi dreptunghic $A_1B_1C_1$ (fig. 83) cu catetele $A_1C_1 = AC$ și $B_1C_1 = BC$. Vom lua simetricul acestui triunghi, față de A_1B_1, formînd astfel patrulaterul $A_1C_1B_1C'_1$. Pe laturile acestui patrulater vom așeza segmentele corespunzătoare ale figurii inițiale, care sînt interceptate de $ACBC'$ (segmentele hașurate din figurile 82 și 83).

Perimetrul acestei noi figuri rămîne același, ca și cel inițial, deoarece este format din aceleași patru arce. Aria

figurii noi este formată din patru segmente și patrulaterul $A_1C_1B_1C'_1$. Segmentele sînt aceleași în ambele figuri, astfel încît este suficient numai să comparăm patrulaterele sau triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, deoarece figurile sînt simetrice. Triunghiul $A_1B_1C_1$ are aria $\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1$. Înălțimea lui ABC, corespunzătoare vîrfului B, este mai mică decît BC, deoarece unghiul din C nu este drept. Prin urmare, aria lui ABC este *mai mică* decît $\frac{1}{2} AC \cdot BC$. Avem însă $A_1C_1 = AC$ și $B_1C_1 = BC$, astfel încît aria lui ABC este mai mică decît aceea a lui $A_1B_1C_1$ și, prin urmare, noua figură are o arie mai mare decît cea inițială.

Demonstrația este acum completă: dîndu-se o figură care nu este cerc, putem găsi o altă figură cu același perimetru și arie mai mare. Singura figură care poate fi maximă este cercul.

Nu am dovedit că cercul are o arie mai mare decît orice altă curbă cu același perimetru. Legătura dintre ceea ce am dovedit și problema completă a fost discutată în capitolul precedent. Soluția completă a acestei probleme poate fi dată, dar ea ar necesita construcția sistematică a unei teorii cuprinzătoare, ceea ce depășește limitele cărții.

XXIII

Fracții zecimale periodice

1. Dezvoltarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală este un proces binecunoscut. Făcînd o asemenea dezvoltare, pot să apară diferite zecimale, după cum se vede din exemplele următoare:

I. $\frac{1}{5} = 0{,}2, \qquad \frac{3}{40} = 0{,}075,$

II. $\frac{4}{9} = 0{,}4444\ldots, \quad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots,$

III. $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots, \quad \frac{7}{30} = 0{,}2333\ldots.$

Cel mai simplu dintre aceste exemple este cel de tipul I. Amintindu-ne semnificația unei fracții zecimale, o putem scrie ca o fracție avînd ca numitor o putere a lui 10:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \quad \frac{3}{40} = \frac{75}{1\,000}.$$

Aceste egalități nu arată nimic neobișnuit. Ele afirmă numai că anumite fracții pot fi amplificate, astfel încît numitorii să devină puteri ale lui 10. Acest lucru poate fi făcut cu orice fracție al cărui numitor divide o putere a lui 10. Caracteristica unui astfel de numitor este că el nu are alți factori primi decît 2 și 5, întrucît $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ divid pe 10^{γ}, dacă γ este cel mai mare dintre numerele α și β. Deci, o fracție cu numitorul $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ poate fi amplificată întotdeauna astfel încît să devină o fracție cu numitor 10^{γ} și, prin urmare, se va dezvolta în fracție cu γ zecimale.

2. Dacă numitorul unei fracții are un factor k nedivizibil prin 2 și 5, atunci ea nu poate fi amplificată astfel încît să devină o fracție avînd ca numitor o putere a lui 10. Deoarece ipoteza

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot k} = \frac{a}{10^{\delta}} = \frac{a}{2^{\delta} \cdot 5^{\delta}}$$

ar implica

$$2^{\delta-\alpha} 5^{\delta-\beta} = a \cdot k.$$

Numărul k, presupus mai mare decît 1, ar fi, prin urmare, divizibil cu 2 sau 5 întrucît, în virtutea unicității descompunerii în factori primi, 2 și 5 sînt singurii factori primi care divid pe $a \cdot k$ și, deci, pe k.

Exemplele II și III sînt de acest tip. În acest caz, vom spune că fracțiile, $\frac{4}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}$ **și** $\frac{7}{30}$ pot fi dezvoltate într-o „fracție zecimală infinită". Acestea nu sînt propriu-zis *fracții* zecimale, în sensul că au drept numitor o putere a lui 10. În dezvoltarea lor ca fracție zecimală nu există ultima zecimală, astfel încît nu există o putere convenabilă a lui 10.

Cînd vorbim de o „fracție zecimală infinită" folosim expresia „fracție zecimală" într-un sens nou, extins. Pentru scopurile noastre nu este nevoie să lămurim înțelesul exact al acestui sens nou. Tot ceea ce ne interesează este aspectul formal al problemei, în cazul de față procesul de dezvoltare a unei fracții ordinare într-o fracție zecimală. Acest proces furnizează neîncetat zecimale ale fracției. Mai mult decît atît, zecimalele în număr infinit care apar sînt *periodice*. Cu alte cuvinte, de la un anumit punct încolo, șirul zecimalelor constă dintr-o repetare nesfîrșită a aceluiași grup de zecimale. De exemplu, dezvoltarea lui $\frac{1}{7}$ constă, de la început, din repetarea lui 142 857. Deoarece există numai zece zecimale, o anumită zecimală trebuie să apară de o infinitate de ori în orice fracție zecimală infinită, dar acest lucru nu înseamnă că toate zecimalele sînt periodice. Un exemplu de fracție zecimală neperiodică este fracția

0,101001000100001...,

unde apar numai cifrele 0 și 1 și unde cel de-al n-lea 1 este urmat de exact n zerouri.

3. Exemple de fracții în care numitorul are un factor prim diferit de 2 și 5 sînt exemplele II și III. Vom arăta acum că astfel de fracții conduc întotdeauna la o dezvoltare zecimală periodică. În primul rînd considerăm exemplul $\frac{1}{7}$, obținînd dezvoltarea zecimală prin metoda obișnuită a împărțirii infinite:

$$\begin{array}{r|l} 1{,}000\,000 & 7 \\ \hline 7 & 0{,}142857\ldots \\ \hline 30 & \\ 28 & \\ \hline 20 & \\ 14 & \\ \hline 60 & \\ 56 & \\ \hline 40 & \\ 35 & \\ \hline 50 & \\ 49 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

De îndată ce apare restul 1, întregul proces ai diviziunii se reia de la început. Șirul resturilor 1, 3, 2, 6, 4, 5 și șirul cîturilor 1, 4, 2, 8, 5, 7 se repetă mereu. Fracția zecimală va avea, prin urmare, perioada 142 857. Deoarece vom urmări împărțirile pentru alte exemple, este convenabil să reprezentăm procesul într-un mod mai strîns. Vom scrie

$$\underset{1\ 326451}{\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}\ldots}$$

unde am scris sub fiecare cît restul corespunzător. Perioada fracției zecimale infinite va fi notată cu o bară deasupra.

Un alt exemplu este

$$\frac{3}{41} = 0,\overline{0\ 7\ 3\ 1\ 7\ldots.}$$
$$\phantom{\frac{3}{41}} = \overline{3\ 30\ 13\ 7\ 29\ 3}$$

Aici procesul de împărțire începe să se repete cînd apare restul 3, deoarece întregul proces începe cu 3. O parte din cifrele cîtului se pot repeta înainte de sfîrșitul perioadei. Nu acest lucru, ci repetarea restului este aceea care face ca procesul să se repete mereu și perioada să se încheie.

Continuînd împărțirile pentru o fracție $\frac{a}{b}$, trebuie eventual să găsim un rest care a apărut mai înainte. (Numărătorul fracției este considerat ca primul rest). Singurele resturi posibile sînt 1, 2, 3, ..., $b-1$. Restul 0 nu este considerat, deoarece apariția sa ar însemna că împărțirea se face exact și fracția zecimală ar fi finită. Dar, am văzut că acest lucru este imposibil, dacă numitorul are un factor prim diferit de 2 și 5. Acum, deoarece există numai $b-1$ resturi posibile, procesul de împărțire trebuie să înceapă din nou de la pasul b sau mai înainte. Dezvoltarea zecimală a lui $\frac{a}{b}$ este periodică și perioada sa are cel mult $b-1$ cifre. Pentru $\frac{1}{7}$ această lungime maximă este atinsă, dar pentru $\frac{3}{41}$ ea nu este atinsă. Un alt exemplu de perioadă de lungime maximă este

$$\frac{1}{17} = 0,\overline{0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{17}} = \overline{1\ 10\ 15\ 14\ 4\ 6\ 9\ 5\ 16\ 7\ 2\ 3\ 13\ 11\ 8\ 12\ 1}$$

cu perioada de lungime $b-1 = 17-1 = 16$.

4. De acum încolo vom considera fracții cu numitorul relativ prim cu 10, adică fracții care nu au ca factori primi ai numitorilor pe 2 sau 5. Sîntem în situația de a spune mult mai mult în legătură cu lungimea perioadei.

Fracția $\frac{a}{b}$ va fi presupusă *ireductibilă*; a și b sînt prime între ele. Atunci resturile care apar în împărțire vor fi

toate prime cu b. Într-adevăr, să presupunem că r este un rest care este prim cu b. Ultimul pas al împărțirii constă din împărțirea lui $10\,r$ cu b pentru a obține cîtul q și restul r_1. Adică, b apare în $10\,r$ exact de q ori și ne rămîne restul r_1,

$$10r = qb + r_1$$

sau

$$r_1 = 10r - qb. \tag{1}$$

Nici un factor prim al lui b nu poate să dividă pe 10 sau pe r. Prin urmare, nici unul nu poate să dividă pe $10\,r$ și nici unul nu divide pe $10\,r - qb$. Rezultă că orice rest r, care este prim cu b, este urmat de un alt rest r_1, care este, de asemenea, prim cu b. Deoarece numitorul a este socotit ca fiind primul rest, și acesta este prim cu b, rezultă că toate resturile sînt prime cu b. Prin urmare, *perioada lui* $\frac{a}{b}$ *nu poate fi mai lungă decît numărul resturilor prime cu* b.

Numărul resturilor prime cu b este un număr interesant prin el însuși. În teoria numerelor el se notează în mod obișnuit cu simbolul φ(b), și avem, de exemplu, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$. Deoarece pentru un număr prim p toate cele $p - 1$ numere mai mici sînt prime cu el, avem

$$\varphi(p) = p - 1. \tag{2}$$

Folosind simbolul $\varphi(b)$, putem spune acum că perioada lui $\frac{a}{b}$ are cel mult $\varphi(b)$ cifre, dacă b este prim cu 10.

5. Am văzut că dezvoltarea zecimală pentru o fracție $\frac{a}{b}$ trebuie să fie periodică, dacă b are un factor prim diferit de 2 și 5, chiar și atunci cînd b nu este prim cu 10. Am văzut, de asemenea, că o parte din resturile posibile, în număr finit, trebuie eventual să fie repetate. Prin urmare, știm că trebuie să existe o perioadă, dar nu putem fi siguri cînd începe perioada. În exemplul II, perioada începe

imediat după virgulă, pe cînd în III ea începe numai după o zecimală. În II numitorii au fost aleși astfel încît să nu aibă factori comuni cu 10, și vom arăta că perioada dezvoltării zecimale a lui $\frac{a}{b}$ începe întotdeauna imediat după virgulă, dacă b este prim cu 10. Pentru a face acest lucru va trebui să arătăm că primul rest care se repetă prima dată este chiar numărătorul. Dacă două resturi sînt egale, $r_m = r_n$, atunci cele două resturi precedente r_{m-1} și r_{n-1} sînt de asemenea egale (dacă aceste resturi există). Întrucît r_m și r_n au apărut prin împărțirea lui $10\,r_{m-1}$ și $10\,r_{n-1}$,

$$10\,r_{m-1} = q_{m-1} \cdot b + r_m,$$

$$10\,r_{n-1} = q_{n-1} \cdot b + r_n.$$

Avînd în vedere că $r_m = r_n$, găsim prin scădere

$$10\,(r_{m-1} - r_{n-1}) = (q_{m-1} - q_{n-1})b,$$

și, prin urmare, b divide pe $10\,(r_{m-1} - r_{n-1})$. Deoarece b este prim cu 10, el trebuie să dividă pe $r_{m-1} - r_{n-1}$, astfel încît această diferență trebuie să fie unul dintre numerele

$$0, \quad \pm b, \quad \pm 2b, \quad \pm 3b, \ldots .$$

Pe de altă parte, r_{m-1} și r_{n-1} sînt resturi, astfel încît fiecare este mai mic decît b, deci și această diferență este mai mică decît b. Singura posibilitate este să avem

$$r_{m-1} - r_{n-1} = 0,$$

$$r_{m-1} = r_{n-1}.$$

Prin urmare, perioada începe imediat după virgulă.

6. Dacă notăm lungimea perioadei cu λ, atunci în dezvoltarea lui $\frac{a}{b}$ în fracție zecimală ajungem la restul a, prima oară, după λ împărțiri. La fiecare împărțire ne deplasăm cu o cifră la dreapta fracției. Restul a care apare după λ împărțiri reprezintă de fapt restul împărțirii lui $10^\lambda\,a$ prin b. Prin urmare, dacă împărțim pe $10^\lambda\,a$

prin b, restul este a, adică $10^\lambda a - a$ este divizibil cu b. Întrucît avem

$$10^\lambda a - a = a(10^\lambda - 1),$$

și deoarece a este prim cu b, rezultă că b divide pe $10^\lambda - 1$. Întrucît perioada se încheie la *prima* repetare a restului a, λ este *cel mai mic* număr pentru care $10^\lambda - 1$ este divizibil cu b, adică cel mai mic număr pentru care $a \cdot 10^\lambda$ are restul a la împărțirea prin b.

Am dovedit astfel:

Teorema I. *Lungimea* λ *a perioadei lui* $\frac{a}{b}$ *este cel mai mic număr* λ *pentru care* $10^\lambda - 1$ *este divizibil cu* b.

Două fapte, implicit incluse în această teoremă, merită să fie relevate. *Întîi*, oricărui număr b care este prim cu 10 îi corespunde un număr λ, astfel încît $10^\lambda - 1$ să fie divizibil cu b. Existența unui astfel de număr nu este evidentă de la sine, dar am obținut acest număr ca lungime a perioadei și am dovedit existența perioadei în § 3. În al *doilea rînd*, numărul λ este determinat de b și este *independent* de a. Toate fracțiile ireductibile $\frac{a}{b}$, cu același numitor b, au perioade de aceeași lungime. Vom indica dependența lui λ de b scriind $\lambda = \lambda(b)$.

7. Vom considera acum dezvoltarea zecimală a lui $\frac{a}{b}$ pentru diferite valori ale lui a, b rămînînd neschimbat. Am arătat că

$$\frac{1}{7} = 0,\overset{1\ 3}{1}\overset{2}{4}\overset{6}{2}\overset{4}{8}\overset{5}{5}\overset{1}{7}\ldots,$$

și, în mod similar, obținem

$$\frac{2}{7} = 0,\overset{2\ 6}{2}\overset{4}{8}\overset{5}{5}\overset{1}{7}\overset{3}{1}\overset{2}{4}\ldots.$$

Perioada 285 714, corespunzătoare lui $\frac{2}{7}$, poate fi obținută din perioada 142 857 a lui $\frac{1}{7}$ prin reordonare ciclică.

Acest lucru este clar dacă observăm că restul 2, cu care începe dezvoltarea lui $\frac{2}{7}$, apare, de asemenea, printre resturile lui $\frac{1}{7}$. Din acest punct, cele două dezvoltări coincid pas cu pas. Resturile 3, 4, 5, 6 apar și în dezvoltarea lui $\frac{1}{7}$. De fapt, toate cele șase resturi ale lui 7 trebuie să apară, deoarece dezvoltarea lui $\frac{1}{7}$ are perioada de lungime 6. Dacă ne gîndim la zecimalele perioadei ca formînd un ciclu în care ultima cifră este presupusă urmată de prima cifră a perioadei, atunci putem aranja resturile și cîturile într-un tabel

resturi	1	3	2	6	4	5
cîturi	1	4	2	8	5	7

.

Din tabel putem vedea zecimalele dezvoltării lui $\frac{6}{7}$ sau ale oricărei alte fracții asemănătoare. De exemplu, perioada lui $\frac{6}{7}$ începe cu 8 și este, prin urmare, 857 142, astfel încît avem

$$\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857\,142}.$$

Perioadele despre care am discutat sînt perioade de cîturi. Am văzut însă că resturile furnizează, de asemenea, perioade de același fel și de aceeași lungime.

8. Perioadele lui $\frac{a}{b}$ nu pot depăși lungimea $\varphi(b)$, dar nu este necesar ca ele să fie de această lungime. Pentru $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{17}$ am găsit perioade de lungime maximă, dar pentru $\frac{3}{41}$ am găsit $\lambda = 5$, care este mai mic decît $\varphi(41) = 40$. Lungimea perioadei este greu de determinat dinainte și trebuie găsită în fiecare caz. Dar putem spune ceva mai mult despre lungimea $\lambda(b)$, în afară de faptul că $\lambda(b) \leqslant \varphi(b)$.

Vom folosi exemplul $\frac{1}{21}$ ca punct de plecare pentru discuția noastră. Prin încercări se găsește ușor că $\varphi(21) = 12$. Prin împărțire obținem

$$\frac{1}{21} = 0,\overset{1\ 10\ 16\ 13\ 4\ 19\ 1}{\overline{0\ 4\ 7\ 6\ 1\ 9}}\ldots$$

cu perioada de lungime $\lambda(21) = 6 < 12 = \varphi(21)$. În procesul de împărțire apar numai 6 din cele 12 resturi posibile și le putem aranja într-un tabel:

(A)
resturi	1	10	16	13	4	19
cîturi	0	4	7	6	1	9

În acest tabel putem citi

$$\frac{10}{21} = 0,\overline{476190}\ldots, \quad \frac{4}{21} = 0,\overline{190476}\ldots,$$

și altele, dar nu putem găsi dezvoltarea lui $\frac{2}{21}$. Această fracție necesită o nouă împărțire

$$\frac{2}{21} = 0,\overset{2\ 20\ 11\ 5\ 8\ 17\ 2}{\overline{0\ 9\ 5\ 2\ 3\ 8}}\ldots,$$

din care obținem un nou tabel

(B)
resturi	2	20	11	5	8	17
cîturi	0	9	5	2	3	8

În noul tabel apare în plus nu numai restul 2, dar și toate celelalte resturi sînt noi. S-ar fi putut vedea de la început că nu vor apărea resturi dintre cele vechi. Fiecare rest determină complet întreaga dezvoltare ulterioară, astfel încît orice rest al tabelului (A) atrage după sine întreaga perioadă de șase cifre de resturi din (A). Prin urmare, dacă (B) ar conține un rest care apare în (A), el ar conține toate resturile din (A). Deoarece (B) are numai șase resturi, el nu poate conține altele, dar acest lucru nu se potrivește cu faptul că (B) conține restul 2. Cele două

tabele (A) și (B) împreună conțin toate cele $\varphi(21) = 12$ resturi care pot fi numărători de fracții ireductibile cu numitorul 21.

9. Ideile cuprinse în construcția tabelelor (A) și (B) pentru numitorul 21 pot fi folosite pentru a obține cîteva rezultate generale privitoare la lungimea perioadei.

Dacă dezvoltarea lui $\frac{1}{b}$ are lungimea maximă $\lambda(b) = \varphi(b)$, există un singur tabel, ca și în cazul lui $\frac{1}{7}$ din § 7.

Dacă însă găsim $\lambda(b) < \varphi(b)$, ca și pentru $b = 21$, atunci în dezvoltarea lui $\frac{1}{b}$ apar numai $\lambda(b)$ resturi. Folosindu-le, vom alcătui un tabel (A), care nu va conține evident toate cele $\varphi(b)$ resturi posibile. Alegem un rest r prim cu b și care nu apare în (A), și dezvoltăm $\frac{r}{b}$ în fracție zecimală cu perioada de lungime, de asemenea, egală cu $\lambda(b)$, conform cu § 6. Folosim noile resturi și cîturi pentru a forma un al doilea tabel (B). Resturile din (B) vor fi toate diferite de acelea din (A), deoarece (B) conține pe r și orice rest din (A) este urmat de toate celelalte $\lambda(b)$ resturi din (A).

Tabelele (A) și (B) conțin împreună $2\lambda(b)$ resturi diferite, toate prime cu b. Sau aceste numere reprezintă toate resturile posibile, în care caz vom avea $2\lambda(b) = \varphi(b)$, sau există și alte resturi. Dacă s este un rest care nu se află în (A) sau (B), vom dezvolta pe $\frac{s}{b}$ pentru a obține un alt tabel (C), conținînd $\lambda(b)$ resturi, care nu sînt nici în (A), nici în (B). În concluzie, vom avea $3\lambda(b)$ resturi diferite, prime cu b. Dacă $3\lambda(b)$ este egal cu $\varphi(b)$, toate resturile posibile au fost epuizate. Altfel vom repeta procesul, formînd alte tabele, pînă cînd vom epuiza toate cele $\varphi(b)$ resturi posibile. Important este că de fiecare dată cînd apare un nou rest există încă $(\lambda - 1)$ alte resturi noi, care apar o dată cu el.

Aceste tabele vor da în final un număr, să spunem k, de tabele care conțin toate cele $\varphi(b)$ resturi prime cu b.

Fiecare tabel conține $\lambda(b)$ resturi, și nici un rest nu apare de două ori. Prin urmare,

$$\varphi(b) = k \cdot \lambda(b), \tag{3}$$

ceea ce dovedește teorema:

Lungimea $\lambda(b)$ *a perioadei este un divizor*[1] *al lui* $\varphi(b)$.

Am arătat că $\varphi(p) = p - 1$ dacă p este prim. Prin urmare, obținem rezultatul particular că lungimea $\lambda(p)$ a perioadei fracției $\frac{a}{p}$ este un divizor al lui $p - 1$, dacă p este prim. Am considerat mai sus un număr de exemple de acest fel, luînd $\lambda(3) = 1$, $\lambda(7) = 6$, $\lambda(17) = 16$, $\lambda(41) = 5$.

Ca un exemplu suplimentar, vom considera distribuția resturilor în diferitele perioade ale fracțiilor cu numitorul 39. Să începem cu

$$\underset{\substack{\\ 1}}{\frac{1}{39}} = 0\ \overset{\substack{\\ 1}}{0}\ \overset{\substack{\\ 10}}{2}\ \overset{\substack{\\ 22}}{5}\ \overset{\substack{\\ 25}}{6}\ \overset{\substack{\\ 16}}{4}\ \overset{\substack{\\ 4}}{1}\ \overset{\substack{\\ 1}}{\ldots}, \tag{A}$$

de unde se poate obține ușor tabelul resturilor și al cîturilor. Se pune problema dacă tabelul conține toate resturile prime cu 39. Evident, restul 2 lipsește, astfel încît îl vom folosi pentru construcția tabelului următor

$$\underset{\substack{\\ 2}}{\frac{2}{39}} = 0, \overset{\substack{\\ 20}}{0}\ \overset{\substack{\\ 5}}{5}\ \overset{\substack{\\ 11}}{1}\ \overset{\substack{\\ 32}}{2}\ \overset{\substack{\\ 8}}{8}\ \overset{\substack{\\ 2}}{2}\ \ldots, \tag{B}$$

care ne dă șase noi resturi. Cel mai mic rest care este prim cu 39 și nu apare în (A) sau (B) este 7. Aceasta ne permite să găsim un nou tabel

$$\underset{\substack{\\ 7}}{\frac{7}{39}} = 0, \overset{\substack{\\ 31}}{1}\ \overset{\substack{\\ 37}}{7}\ \overset{\substack{\\ 19}}{9}\ \overset{\substack{\\ 34}}{4}\ \overset{\substack{\\ 28}}{8}\ \overset{\substack{\\ 7}}{7}\ \ldots. \tag{C}$$

Acum 14 este cel mai mic rest prim cu 39, care nu apare printre cele 18 resturi din (A), (B) și (C), și îl vom folosi pentru a continua procesul:

$$\underset{\substack{\\ 14}}{\frac{14}{39}} = 0, \overset{\substack{\\ 23}}{3}\ \overset{\substack{\\ 35}}{5}\ \overset{\substack{\\ 38}}{8}\ \overset{\substack{\\ 29}}{9}\ \overset{\substack{\\ 17}}{7}\ \overset{\substack{\\ 14}}{4}\ldots. \tag{D}$$

[1] Divizorul impropriu $\varphi(b)$ nu trebuie exclus.

În total avem 24 resturi diferite, prime cu 39. Aceste resturi epuizează toate resturile posibile. Într-adevăr, printre numerele de la 1 la 39 multiplii lui 3 și 13 vor avea factori comuni cu 39. Multiplii lui 3 sînt în număr de 13, inclusiv 39, și multiplii lui 13 sînt în număr de 2, numerele 13 și 26. (39 a fost numărat printre multiplii lui 3). În total, 15 numere dintre numerele cuprinse între 1 și 39 au factori comuni cu 39, iar restul de 39—15 = 24 sînt prime cu 39. Rezultă că $\varphi(39) = 24$, ceea ce este în concordanță cu $\lambda(39) = 6$. Apoi, întrucît $\varphi(39) = 4\ \lambda(39)$, există patru tabele, (A), (B), (C), și (D).

10. Rezultatele noastre privitoare la lungimea perioadei pot fi folosite pentru a obține o teoremă generală importantă. Avem nevoie de următoarea lemă simplă:

Dacă x și k sînt numere întregi pozitive, atunci $x^k - 1$ este divizibil cu $x - 1$.

Această lemă rezultă direct din formula

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})(x - 1) = x^k - 1,$$

care poate fi dedusă din formula sumei progresiei geometrice sau direct prin înmulțire. Dacă luăm $x = 10^{\lambda(b)}$, atunci lema afirmă că $10^{\lambda(b)} - 1$ divide pe $10^{k\lambda(b)} - 1$. Vom da lui k valoarea particulară din (3), astfel încît obținem

$$10^{k\lambda(b)} - 1 = 10^{\varphi(b)} - 1.$$

Prin urmare, $10^{\lambda(b)} - 1$ este un divizor al lui $10^{\varphi(b)} - 1$. Dar, conform § 6, b divide pe $10^{\lambda(b)} - 1$ și, prin urmare b este un divizor al lui $10^{\varphi(b)} - 1$. Vom enunța acest lucru, în teorema:

Dacă b este prim cu 10, atunci $10^{\lambda(b)} - 1$ este divizibil cu b.

Această teoremă nu are nimic de-a face cu fracțiile zecimale, deoarece $\varphi(b)$ are un înțeles independent. Ecuația (2) ne dă un caz particular:

Dacă p este prim și nu divide pe 10, atunci $10^{p-1} - 1$ este divizibil cu p.

Prezența numărului 10 în aceste teoreme nu este esențială. Ea se datorește numai faptului că sistemul nostru

obișnuit de numerație este bazat pe numărul 10. Dacă ne închipuim că folosim un alt sistem, bazat pe numărul g, atunci vom spune că avem fracții „g — adice". Întreaga noastră discuție poate fi reluată fără nici o schimbare pentru a obține teoremele generale de mai jos.

T e o r e m a I I. *Dacă b este prim cu g, atunci $g^{\varphi(b)} - 1$ este divizibil cu b.*

T e o r e m a I I I. *Dacă p este un număr prim care nu divide pe g, atunci $g^{p-1} - 1$ este divizibil cu p.*

Am găsit aici o teoremă care depășește cu mult subiectul particular al fracțiilor zecimale. Ea este o teoremă fundamentală din teoria numerelor. Cazul special III se numește teorema lui Fermat, după numele autorului; teorema II este generalizarea dată de Euler teoremei lui Fermat.

Cîteva exemple suplimentare vor ilustra aceste teoreme

$p = 5$:

$$2^{5-1} - 1 = 15 = 3 \cdot 5,$$
$$3^{5-1} - 1 = 80 = 16 \cdot 5,$$
$$4^{5-1} - 1 = 255 = 51 \cdot 5,$$

$p = 7$

$$2^{7-1} - 1 = 63 = 9 \cdot 7,$$
$$3^{7-1} - 1 = 728 = 104 \cdot 7,$$
$$5^{7-1} - 1 = 15624 = 2332 \cdot 7,$$
$$10^{7-1} - 1 = 999999 = 142857 \cdot 7,$$

$b = 6$, $\varphi(6) = 2$:

$$5^2 - 1 = 24 = 4 \cdot 6,$$
$$7^2 - 1 = 48 = 8 \cdot 6,$$

$b = 9$, $\varphi(9) = 6$:

$$2^6 - 1 = 63 = 7 \cdot 9,$$
$$4^6 - 1 = 4095 = 455 \cdot 9,$$
$$5^6 - 1 = 15624 = 1736 \cdot 9,$$

$b = 10$, $\varphi(10) = 4$:

$$3^4 - 1 = 80 = 8 \cdot 10,$$

$$7^4 - 1 = 2400 = 240 \cdot 10,$$

$$9^4 - 1 = 6560 = 656 \cdot 10.$$

11. După această digresiune, ne vom întoarce la fracțiile zecimale. Am văzut că dezvoltarea unei fracții ireductibile $\frac{a}{b}$ cu numitorul b relativ prim cu 10 ne conduce la o fracție zecimală a cărei perioadă începe imediat după virgulă.

Dîndu-se o astfel de fracție zecimală, vom căuta să găsim fracția ordinară din care provine. Să presupunem că fracția zecimală are perioada P, de lungime λ. Vom concepe P ca pe un număr obișnuit cu λ cifre. De exemplu, pentru $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ ... avem $P = 142857$ (o sută patruzeci și două de mii optsutecincizeci și șapte). Dacă fracția zecimală este dezvoltarea lui $\frac{a}{b}$, atunci restul a va apărea din nou după λ împărțiri ale lui a cu b. Cîtul obținut este tocmai perioada. Prin urmare, $a \cdot 10^\lambda - a$ este divizibil cu b și avem

$$a(10^\lambda - 1) = bP,$$

sau

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^\lambda - 1} \quad (4)$$

Fracția din dreapta nu este, în general, ireductibilă, dar simplificînd-o vom obține fracția căutată $\frac{a}{b}$. Deoarece 2 și 5 divid pe 10, ei nu divid pe $10^\lambda - 1$, și deci nu divid pe b, care este un divizor al lui $10^\lambda - 1$. Aceasta arată că orice fracție periodică a cărei perioadă începe imediat după virgulă trebuie să provină dintr-o fracție ordinară $\frac{a}{b}$, în care numitorul este relativ prim cu 10. Știm că reciproca este, de asemenea, adevărată. O fracție zecimală

în care perioada începe imediat după virgulă se numește fracție zecimală „periodică simplă".

12. Am considerat pînă acum numai fracții zecimale periodice simple. Totuși, exemplele din III, § 1 nu sînt periodice simple. Astfel de fracții zecimale, în care pot apare una sau mai multe zecimale între virgulă și perioadă, se numesc fracții „semiperiodice"*. Deoarece fracțiile zecimale *finite* corespund fracțiilor care nu au la numitor alți factori primi în afară de 2 și 5, și deoarece fracțiile *periodice simple* corespund fracțiilor cu numitor relativ prim cu 2 și 5, pentru fracțiile zecimale semiperiodice rămîn numai fracțiile ale căror numitori au un factor comun cu 10 și un factor prim cu 10. Ne mulțumim să menționăm numai acest al treilea caz; el nu ne oferă nimic interesant care să îndreptățească studiul său.

13. După această discuție a proprietăților fundamentale ale fracțiilor zecimale, vom încheia acest capitol cu studiul unei proprietăți mai mult amuzantă decît semnificativă. Perioada lui $\frac{1}{7}$ constă din șase cifre 142 857. Le despărțim în două și adunăm numerele astfel formate:

$$142 + 857 = 999.$$

Perioada lui $\frac{1}{17}$ este 0588235294117647 care, despărțită în două, ne dă prin adunare:

$$05882352 + 94117647 = 99999999.$$

Pentru perioada lui $\frac{1}{11}$, care este 09, avem

$$0 + 9 = 9.$$

Vom arăta că suma celor două jumătăți de perioadă este întotdeauna de această formă, cînd perioada corespunde unei fracții $\frac{a}{p}$ cu numitor prim, presupunînd că perioada are un număr par de cifre.

* sau „periodice mixte".

Dacă lungimea λ a perioadei este un număr par, atunci putem scrie $\lambda = 2l$. De asemenea, dacă cele două jumătăți ale perioadei P sînt A și B, atunci P este un număr cu λ cifre, iar A și B au fiecare cîte l cifre. Amintindu-ne sensul poziției fiecărei cifre dintr-un număr, avem

$$P = A \cdot 10^l + B.$$

Știm că fracția $\frac{a}{p}$ poate fi dedusă din perioada P cu ajutorul lui (4):

$$\frac{a}{p} = \frac{P}{10^\lambda - 1} = \frac{A \cdot 10^l + B}{10^\lambda - 1}. \tag{5}$$

Deoarece $\lambda = 2l$, avem

$$10^\lambda - 1 = 10^{2l} - 1 = (10^l - 1)\ (10^l + 1) \tag{6}$$

Relația (5) arată că numitorul p poate fi amplificat la $10^\lambda - 1$, de unde rezultă că p divide $10^\lambda - 1$, fapt care ar fi putut fi dedus din § 6. Dacă p divide pe $10^\lambda - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1)$, atunci el divide cel puțin unul dintre acești doi factori, întrucît este prim. Or p nu poate divide pe $10^l - 1$, deoarece este mai mic decît λ și λ este *cel mai mic* număr pentru care $10^\lambda - 1$ este divizibil cu p (teorema I, § 6). Prin urmare, p trebuie să dividă pe $10^\lambda + 1$. Din (5) și (6) rezultă

$$\frac{a}{p} = \frac{A \cdot 10^l + B}{(10^l - 1)(10^l + 1)},$$

care poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{a(10^l + 1)}{p} = \frac{A \cdot 10^l + B}{10^l - 1}.$$

Partea stîngă este un număr întreg, deoarece p divide pe $10^l + 1$. Prin urmare, partea dreaptă este, de asemenea, un număr întreg. Avem, de asemenea

$$\frac{A \cdot 10^l + B}{10^l - 1} = \frac{A(10^l - 1) + A + B}{10^l - 1} = A + \frac{A + B}{10^l - 1},$$

și, deoarece A este număr întreg, numărul

$$\frac{A + B}{10^l - 1} = h \tag{7}$$

este de asemenea întreg. Însă A este format din l cifre și este maxim cînd toate aceste cifre sînt 9. Numărul format din l cifre toate egale cu 9 este $10^l - 1$ și, prin urmare, rezultă că $A \leqslant 10^l - 1$. În mod asemănător obținem $B \leqslant 10^l - 1$ și, prin urmare,

$$A + B \leqslant 2 \cdot (10^l - 1).$$

Semnul egal din inegalitatea de mai sus nu poate avea loc, deoarece $A + B = 2 \cdot (10^l - 1)$ implică faptul că atît A cît și B ar avea valoarea $10^l - 1$. Dar, în acest caz, A și B ar conține numai cifre egale cu 9, și P ar fi un șir de $2l$ cifre egale cu 9. Acest lucru este contradictoriu, deoarece perioada ar consta atunci dintr-o *singură* cifră egală cu 9, iar noi am presupus că ea este formată dintr-un număr par de cifre. Avem deci

$$A + B < 2(10^l - 1). \tag{8}$$

Or, (7) poate fi scris

$$A + B = h(10^l - 1), \tag{9}$$

unde h este un număr întreg pozitiv. Ținînd seama de (8), h este mai mic decît 2, deci trebuie să fie 1. Prin urmare, (9) devine

$$A + B = 10^l - 1,$$

adică $A + B$ este numărul de l cifre 99 ... 9.

XXIV

O proprietate caracteristică cercului

Cînd plouă pămîntul este umed; dar dacă pămîntul este umed nu plouă neapărat. Acest exemplu este citat adesea pentru a lămuri diferența dintre o teoremă și reciproca ei. Cu toate că acest lucru este extrem de simplu în formularea precedentă, în viața obișnuită se fac confuzii grave. Persoane inteligente, pentru care deosebirea este limpede atunci cînd li se atrage atenția, sînt înclinate adeseori la confuzii inconștiente. Un orator politic reia adesea o afirmație a adversarului și o face să devină ridicolă enunțînd-o sub formă reciprocă, fără ca trucul să fie observat de auditori. Orice matematician știe că în predare trebuie să educe în mod sistematic pe începători să evite erorile provenite prin utilizarea unor reciproce nedovedite.

Trecerea conștientă de la o teoremă la reciproca ei este un principiu util și fecund pentru cercetarea matematică. Capitolul de față și cel ce urmează, care sînt de altfel independente, vor arăta cum se poate folosi acest principiu pentru a ajunge de la teoreme cunoscute la alte teoreme și concepte cu totul noi.

Începem cu un exemplu simplu de teoremă matematică și de reciprocă a ei. Teorema că unghiurile înscrise într-un cerc și care subîntind coarde egale sînt egale [1] (fig. 84) este cunoscută din geometria elementară. Important este faptul că reciproca teoremei este de asemenea adevărată: locul tuturor punctelor din care un segment AB se vede

[1] Dacă D se află pe porțiunea inferioară a arcului AB, atunci unghiul trebuie măsurat între prelungirea lui AD prin D și direcția DB (altfel trebuie considerate unghiurile suplimentare).

sub un unghi dat este un cerc. În geometria elementară importanța acestei teoreme și a reciprocei sale nu este destul de clară. Deoarece atît teorema cît și reciproca sînt adevărate, această proprietate a unghiurilor înscrise este caracteristică pentru cerc. Ea poate fi folosită în locul definiției obișnuite, după care un cerc este locul tuturor punctelor situate la o anumită distanță de un anumit

Fig. 84

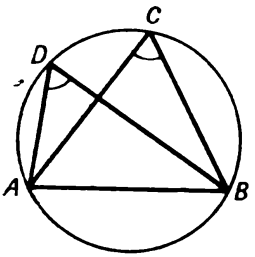
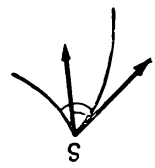


Fig. 85



punct. Într-adevăr, cele mai multe dintre teoremele interesante despre cerc sînt dovedite de-abia după această teoremă, și ele se bazează pe ea în mod direct mai mult decît pe definiția cercului.

Urmînd aceste observații preliminarii, considerăm o altă proprietate a cercului și vom arăta că ea este caracteristică. În geometria elementară un unghi se definește (pe bună dreptate, desigur) ca deschiderea dintre două *drepte*. Totuși, nu există nici un motiv de a nu considera deschiderea dintre două curbe. La nevoie, ea poate fi definită ca fiind egală cu unghiul dintre tangentele la cele două curbe în vîrf (fig. 85).

Cercul are proprietatea evidentă după care coarda care unește două puncte de pe el întîlnește cercul în unghiuri egale la cele două capete. Aceste unghiuri sînt unghiuri dintre o dreaptă și o curbă. Considerăm acum reciproca și ridicăm problema ; *dacă o curbă are proprietatea că oricare coardă unind orice pereche de puncte de pe ea face la capete unghiuri egale cu curba, atunci curba respectivă este un cerc, sau există și alte curbe cu această proprietate?* (fig. 86). Vom arăta că numai cercurile au această proprietate, care rezultă a fi astfel caracteristică pentru cerc.

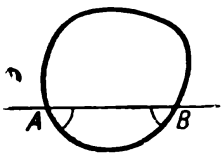


Fig. 86

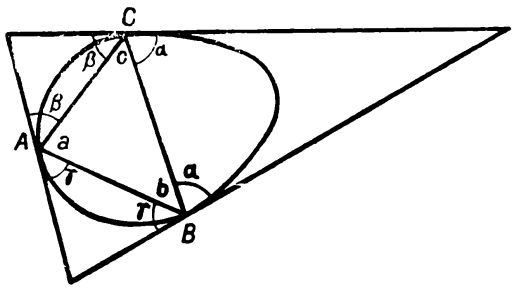


Fig. 87

Să presupunem că avem o curbă cu această proprietate și că A,B,C sînt trei puncte arbitrare de pe curbă (fig. 87). Vom duce cele trei coarde care unesc aceste puncte și cele trei tangente la curbă în aceste puncte. Atunci, pe baza proprietății presupuse, unghiurile notate cu aceleași litere pe figură sînt egale.

Cele trei unghiuri din A formează un unghi de 180°, și același lucru este adevărat pentru unghiurile din B și C. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} a + \beta + \gamma &= \pi, \\ \alpha + b + \gamma &= \pi, \\ \alpha + \beta + c &= \pi, \end{aligned}$$

Adunînd aceste ecuații, obținem

$$(a + b + c) + 2(\alpha + \beta + \gamma) = 3\pi.$$

Acum, deoarece suma unghiurilor dintr-un triunghi este π, avem

$$a + b + c = \pi,$$

și, prin urmare,

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Comparînd ultima egalitate cu

$$a + \beta + \gamma = \pi,$$

obținem $a = \alpha$. Analog se arată că $b = \beta$, $c = \gamma$.

Fie acuma D un punct arbitrar de pe curbă. Putem construi triunghiul ABD și să-l tratăm exact ca și pe ABC. Deoarece punctele A și B sînt comune celor două triunghiuri, coarda AB și tangentele în A și B sînt identice. Din această cauză, unghiul γ este același în ambele figuri. Întrucît unghiul d din D este egal cu γ și $\gamma = c$, avem $d = c$ pentru orice punct de pe curbă. Astfel, coarda AB subîntinde unghiuri egale din orice punct D al curbei. Datorită reciprocei teoremei despre unghiurile înscrise, aceasta arată că D se află pe cercul determinat de punctele ABC. Deoarece D este un punct arbitrar de pe curbă, curba trebuie să fie un cerc.

Spre deosebire de acest rezultat, în capitolul următor va fi prezentată o proprietate a cercului care nu este caracteristică. Vom arăta că există o serie întreagă de curbe cu această proprietate și vom da un exemplu în care principiul reciprocei conduce la noi concepte, în cazul de față la o clasă remarcabilă de curbe.

XXV

Curbe de lățime constantă

1. Un cerc se definește ca loc geometric al punctelor situate la o distanță dată de un punct fix numit centru. Roata este o aplicație practică, directă a acestei proprietăți a cercului. Axul roții este menținut la o înălțime constantă deasupra terenului de spițe de lungime egală, care mențin astfel o mișcare rectilinie. Pentru a suporta greutăți mari, roțile și axele nu sînt uneori suficient de puternice. În acest caz se recurge adesea la sistemul mult mai primitiv de role. Greutatea este deplasată peste niște role cilindrice (fig. 88) continuu așezate înaintea sa. Ea se deplasează orizontal deasupra acestor cilindri de secțiuni circulare.

Evident, o roată trebuie să aibă forma unui cerc cu axul în centru, deoarece orice altă formă ar produce oscilații. Totuși, în mod surprinzător, nu este necesar ca rolele să aibă secțiuni circulare pentru a realiza sarcina cerută. Pentru role *centrul* nu mai prezintă așa mare importanță. Proprietatea cercului care ne permite să-l folosim ca secțiune de role este aceea că orice pereche de tangente paralele se află întotdeauna la o aceeași distanță una de alta oricum s-ar roti cercul. Cercul are aceeași lățime în orice direcție; este ceea ce se numește o „curbă de lățime constantă". Ne-am putea aștepta ca această proprietate a cercului să fie caracteristică, ca și proprietatea discutată în capitolul precedent. Dar în mod surprinzător, există și alte curbe cu aceeași proprietate. Într-adevăr, există o clasă numeroasă de curbe de lățime constantă, care nu sînt cercuri.

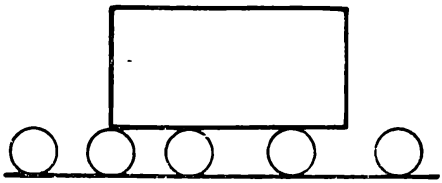


Fig. 88

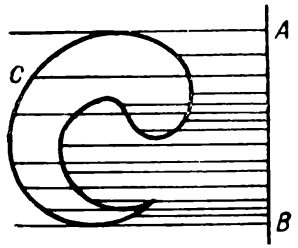


Fig. 89

2. Dacă dorim să determinăm lățimea unei curbe C într-o anumită direcție, putem proiecta fiecare punct al curbei perpendiculare pe o dreaptă paralelă cu acea direcție (fig. 89). Proiecția va acoperi un anumit segment AB pe dreaptă, și lungimea acestui segment va fi lățimea curbei în direcția dată.

Cele două linii de proiecție care sînt perpendiculare pe AB în A și B au cel puțin un punct comun cu curba, și întreaga curbă se află de o singură parte a acestora. Vom numi o dreaptă cu această proprietate „dreaptă de sprijin" a curbei.

O curbă închisă are exact două drepte de sprijin în fiecare direcție. Acestea pot fi găsite prin metoda din fig. 89, sau putem duce două drepte paralele cu o direcție dată, care conțin curba între ele, și apoi să le deplasăm pînă cînd ating curba (fig. 90).

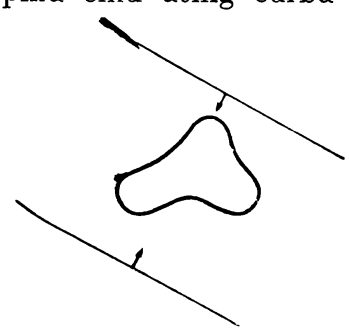


Fig. 90

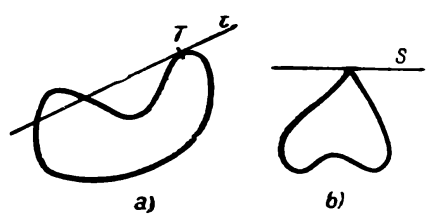


Fig. 91

Noțiunea de dreaptă de sprijin nu coincide cu aceea de dreaptă tangentă. În fig. 91a, dreapta t este tangentă la T, dar nu este dreaptă de sprijin. În fig. 91b, s este o dreaptă de sprijin, dar nu este tangentă la curbă.

Pentru o curbă de lățime constantă, distanța între dreptele oricărei perechi de drepte de sprijin este o mărime constantă b. Dacă ducem două perechi de drepte de spri-

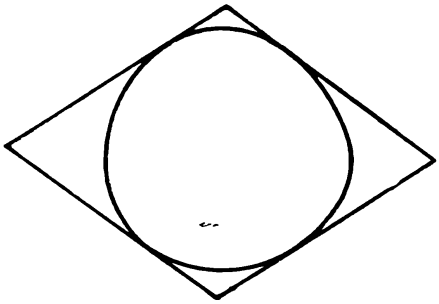


Fig. 92

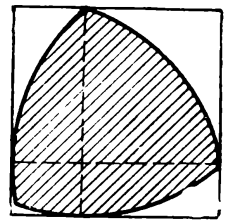


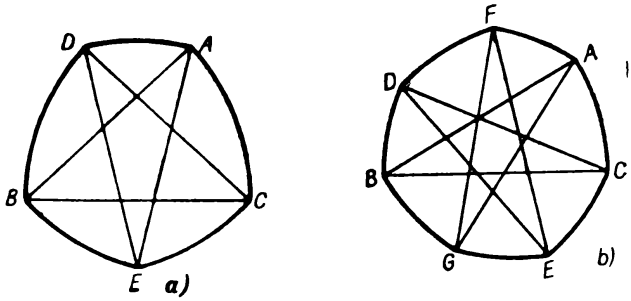
Fig. 93

jin la o astfel de curbă, paralelogramul pe care îl formează va fi un romb (fig. 92). Dacă perechile de drepte de sprijin sînt perpendiculare, rombul este un pătrat de latură *d*. Urmează că pătratele circumscrise unei curbe de lățime constantă sînt egale. Acest lucru poate fi ilustrat amuzant, decupînd o piesă din carton gros după conturul unei curbe de lățime constantă și făcînd o deschidere de forma unui pătrat într-o altă bucată de carton. Dacă pătratul are laturile egale cu lățimea curbei, atunci el va atinge conturul primei piese în orice direcție l-am răsuci. Figura curbă poate fi rotită în interiorul pătratului fără a dispune de spațiu suplimentar. Este adevărată și reciproca. Prin urmare, o curbă de lățime constantă poate fi rotită în interiorul unui pătrat în care este înscrisă, și o curbă care poate fi rotită în interiorul unui pătrat, rămînînd tot timpul înscrisă, este o curbă de lățime constantă.

3. Cea mai simplă curbă de lățime constantă, care nu este cerc, este triunghiul curbiliniu desenat în fig. 93. Cele trei laturi sînt arce de cerc egale, cu centrul în vîrful opus. Cele trei arce au raze egale cu lățimea constantă *b* a curbei. Oricare pereche de drepte de sprijin paralele este formată dintr-o dreaptă care întîlnește triunghiul într-un vîrf și o altă dreaptă tangentă laturii opuse, sau ambele întîlnesc triunghiul în vîrfuri. În primul caz, distanța dintre liniile de sprijin este evident *b*. În al doilea caz, fiecare linie de sprijin este tangentă arcului opus celuilalt vîrf, iar distanţa dintre ele este egală din nou cu *b*.

Acest triunghi curbiliniu a fost considerat prima oară ca exemplu de curbă de lățime constantă de tehnologul

Fig. 94



Reuleaux. El a demonstrat cinematic că această curbă poate fi rotită în interiorul unui pătrat fără a înceta de a fi înscrisă. Am văzut tocmai că această proprietate este caracteristică pentru curbele de lățime constantă.

4. Principiul folosit pentru a construi triunghiul Reuleaux poate fi extins la o figură cu mai multe laturi. Ideea esențială este de a duce o serie de arce de raze egale, astfel încît centrul fiecărui arc să fie în vîrful opus. Putem începe cu un punct oarecare B, ca prim vîrf, ducînd un arc de rază b cu centrul în B. Pe acest arc vom alege două puncte A și C ca noi vîrfuri. Arcul de rază b, cu centrul C, trece prin B, deoarece $BC = b$ prin construcția inițială. Pe acest arc vom alege un alt vîrf D. Arcul de rază b, cu D ca centru, trece prin C. Dacă dorim să încheiem acest proces, vom alege vîrful E pe acest arc, astfel încît el să fie totodată pe un arc de rază b cu centrul în A. Cu alte cuvinte, E este intersecția acestor două arce. În sfîrșit, vom uni A și D printr-un arc cu centrul E, obținînd un pentagon curbiliniu $ADBEC$ de lățime constantă (fig. 94a). Se pot construi astfel poligoane curbilinii cu oricît de multe laturi prin amînarea pasului de închidere a curbei. Fig. 94b este un astfel de poligon cu șapte laturi. Deoarece fiecare vîrf este opus unei laturi, care este un arc de rază b avînd centrul în vîrful considerat, rezultă imediat că această construcție realizează o curbă de lățime constantă b. În vederea unui scop ulterior am unit fiecare vîrf cu capetele arcului opus prin raze. Aceste raze formează un poligon stelat cu toate laturile egale. Unghiul format de fiecare pereche de raze într-un vîrf este unghiul la centru al arcului opus.

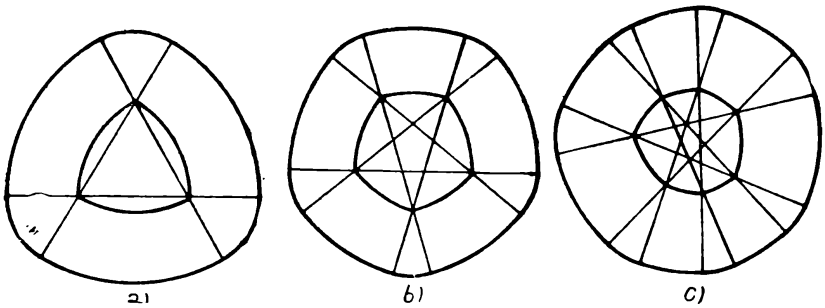


Fig. 95

Toate poligoanele curbilinii construite prin această metodă vor avea un număr *impar* de laturi. Pentru a vedea acest lucru, vom alege un vîrf și latura opusă. Dacă parcurgem acum curba pornind din vîrful ales, vom parcurge întîi o latură, apoi un vîrf și așa mai departe, alternativ, pînă cînd ajungem la un vîrf al laturii marcate pe care nu o parcurgem. În total, vom parcurge un anumit număr, să spunem n de laturi, și același număr de vîrfuri, mergînd de la vîrful ales pînă la latura aleasă. Dacă acum pornim din vîrful ales, din nou, și descriem curba *în direcție opusă*, vom trece din nou prin n laturi și n vîrfuri înainte de a ajunge la latura aleasă, deoarece fiecărui vîrf din primul traseu i se opune o latură în traseul al doilea și reciproc, fiecărei laturi un vîrf. Socotind cele două trasee, obținem $2n + 1$ vîrfuri și același număr de laturi.

5. Curbele pe care le-am construit au toate vîrfuri, adică puncte în care două laturi se întîlnesc formînd un unghi. Totuși, putem folosi aceste curbe pentru a obține alte curbe de lățime constantă, care nu au de loc vîrfuri. Pornind de la una dintre curbele noastre, vom duce o curbă paralelă cu ea și exterioară, la o distanță fixă d (fig. 95a, b, c). Acest lucru se face cu ușurință cu ajutorul unor poligoane diagonale desenate în interiorul curbei. Vom înlocui fiecare arc al curbei inițiale printr-un arc cu același centru, dar cu raza mărită cu d. Vîrfurile figurii inițiale sînt considerate ca arce de rază O, astfel încît ele sînt înlocuite cu arce de rază d. Figura rezultată este formată de un număr impar de arce de o anumită rază și

de același număr de laturi de cealaltă rază. Arcele se grupează în perechi, un arc de o rază fiind grupat în pereche cu un altul de cealaltă rază, avînd același centru (un vîrf al curbei inițiale). Același principiu poate fi folosit pentru a construi poligoane curbilinii de lățime constantă cu arce avînd raze de mai mult de două mărimi diferite. Arcele opuse sînt aranjate astfel încît să aibă același centru și unghiurile la centru să fie opuse (fig. 96).

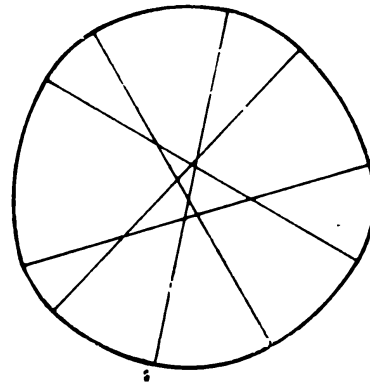


Fig. 96

Aceste metode ne permit de a construi un număr nelimitat de curbe de lățime constantă. Totuși, aceste curbe au toate proprietatea particulară că sînt formate dintr-un număr de arce de cerc. Pentru a evita o eroare, vrem să subliniem că există curbe de lățime constantă pentru care nici o porțiune, oricît de mică, nu este arc de cerc.

6. Acum, după ce am văzut cîteva exemple de curbe de lățime constantă, vom considera cîteva din proprietățile lor generale. În toate exemplele noastre curbele sînt curbe convexe, adică curbe care au numai două puncte comune cu orice dreaptă care le intersectează. Pentru a simplifica discuția, ne vom restrînge la curbe convexe, subînțelegînd totdeauna acest lucru fără a-l mai afirma explicit. De fapt, acest lucru un introduce nici o restricție. Se poate dovedi că orice curbă de lățime constantă este convexă. Totuși, demonstrația ne-ar antrena mult în afara limitelor impuse și o vom evita cu ajutorul acestei restricții.

Strict vorbind, o curbă convexă este frontiera unei regiuni convexe. O regiune convexă este caracterizată prin proprietatea că oricare două puncte ale ei pot fi unite printr-un segment de dreaptă în întregime conținut în regiune. Exemple de regiuni convexe sînt: un pătrat, un cerc, un triunghi, o elipsă și toate figurile de lățime constantă menționate. Este clar că o linie de sprijin a unei

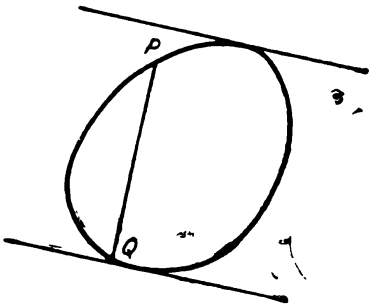


Fig. 97

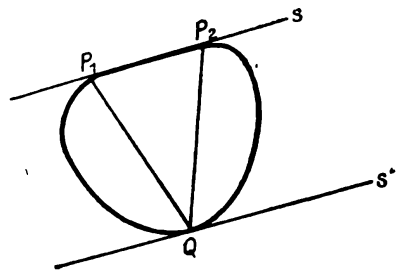


Fig. 98

regiuni convexe va avea fie un punct comun cu frontiera, fie un întreg segment. Totuși, putem dovedi:

Teorema I. *O curbă de lățime constantă are exact un punct comun cu fiecare dreaptă de sprijin.*

Înainte de a dovedi acest lucru vom face o simplă observație.

Teorema II. *Distanța dintre două puncte oarecare ale unei curbe de lățime constantă b este cel mult egală cu b.*

Într'adevăr, dacă P și Q sînt două puncte ale curbei (fig. 97), atunci cele două linii de sprijin perpendiculare pe segmentul PQ trebuie să conțină pe PQ între ele. Prin urmare, distanța dintre aceste drepte este cel puțin tot atît de mare cît PQ. Deoarece distanța între două drepte de sprijin este d, obținem rezultatul dorit.

Întorcîndu-ne acum la demonstrația teoremei I, presupunem că ea este falsă, că două puncte de pe curbă P_1 și P_2 se află pe o dreaptă de sprijin s (fig 98). Ducem dreapta de sprijin s', paralelă cu s, de cealaltă parte a curbei, și fie Q un punct de contact al lui s' cu curba. Distanța între s și s' este din nou b.

Segmentele P_1Q și P_2Q nu pot fi ambele perpendiculare pe s, deoarece triunghiul P_1QP_2 nu poate avea două unghiuri drepte. Prin urmare, unul din segmente este mai mare decît b, și aceasta contrazice teorema II. Astfel, ipoteza existenței a două puncte situate pe o aceeași dreaptă de sprijin este infirmată, și cu aceasta am dovedit teorema I.

Dacă folosim din nou faptul că o dreaptă perpendiculară care unește două drepte de sprijin opuse are lungimea b,

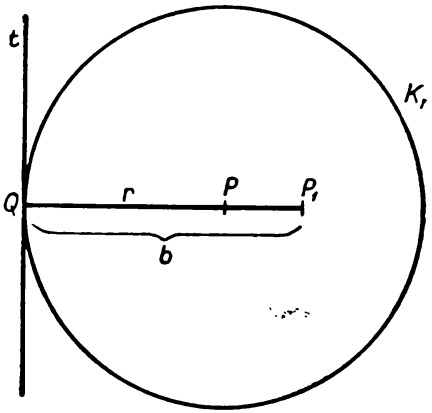


Fig. 99

pe cînd orice alt segment care le unește este mai lung, obținem imediat teorema:

Teorema III. *Dacă o dreaptă unește două puncte de contact de pe două drepte de sprijin paralele ale unei curbe de lățime constantă, atunci ea este perpendiculară pe dreptele de sprijin.*

7. Ducînd un cerc de rază b cu centrul într-un punct al unei curbe de lățime constantă d, după teorema II, întreaga curbă va fi cuprinsă în cerc. Vom arăta acum că nu este posibil ca toate punctele curbei să fie interioare cercului, ci trebuie să existe cel puțin un punct al curbei situat pe circumferință.

Fie P un punct de pe curba C de lățime constantă b. Cu centrul în P vom duce un cerc K_1 (fig. 99) suficient de mare pentru a cuprinde curba C, dar de ajuns de mic pentru a avea un punct Q al lui C pe circumferință. Raza r al lui K_1 este cel mult egală cu b, deoarece cercul K de rază b și centru P conține C. Prin urmare, K_1 este interior sau cel mult identic cu K.

Tangenta t la cercul K_1 în Q trece prin punctul Q al lui C. Apoi, C este cuprins în interiorul lui K_1, astfel încît el se află de o singură parte a lui t. Prin urmare, t este o dreaptă de sprijin a lui C. Dreapta de sprijin s, paralelă cu t de cealaltă parte a curbei C, este la distanța b de t, deoarece C este de lățime constantă b. Conform teoremei III, punctul de contact P_1 a lui s se află pe perpendiculara la t în Q. Dacă $r = b$, atunci P_1 cade în P; dacă $r < b$,

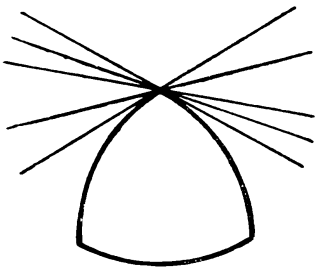


Fig. 100

atunci P se află între Q și P_1, dar acest fapt nu este posibil. Cele trei puncte Q, P, P_1 ar aparține lui C și ar fi coliniare. Or, o curbă convexă poate fi intersectată de o dreaptă numai în două puncte. O dreaptă poate avea mai mult de două puncte comune cu o curbă convexă numai dacă ar fi o linie de sprijin. Dar știm după teorema I că o linie de sprijin are un singur punct comun cu o curbă de lățime constantă. Prin urmare, P_1 coincide cu P, și avem $r = b$.

În această demonstrație P a fost un punct arbitrar al curbei C și am construit o linie de sprijin s a lui C prin acest punct. Rezultă că am dovedit:

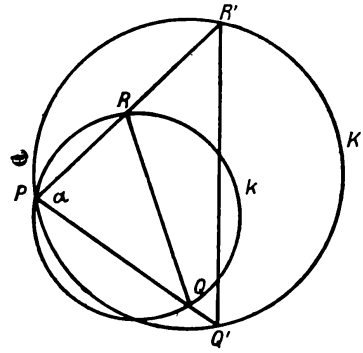
Teorema IV. *Există cel puțin o dreaptă de sprijin prin orice punct al unei curbe de lățime constantă.*

O curbă de lățime constantă poate avea puncte în care există mai multe drepte de sprijin. Astfel de puncte se numesc vîrfuri. În exemplele noastre inițiale am avut multe curbe de lățime constantă cu vîrfuri. Într-un vîrf, toate dreptele care se află în unghiul format de două drepte de sprijin sînt, evident, drepte de sprijin ele însile (fig. 100). Prin urmare, o curbă convexă are un întreg *fascicul* de drepte de sprijin în fiecare vîrf. Printre aceste drepte de sprijin există două extreme care mărginesc fasciculul.

Dacă P este un punct arbitrar al lui C, atunci, după teorema IV, putem duce o dreaptă de sprijin s a lui C, în acest punct. Ducem perpendiculara pe s în P. Ea va intersecta curba C într-un punct opus Q, și PQ va avea lungimea Q. Cercul de rază b și centrul Q va cuprinde atunci pe C și va avea pe s ca tangentă. Acest lucru poate fi enunțat sub forma următoare:

Teorema V. *Prin orice punct P al unei curbe de lățime constantă poate fi dus un cerc de rază b, care cuprinde curba și care este tangent în P, la dreapta de sprijin a curbei trecînd prin P sau la o dreaptă de sprijin arbitrar dată, dacă există mai mult de una.*

Fig. 101



8. Următoarea teoremă stabilește o legătură între curbele de lățime constantă și cercuri:

T e o r e m a V I. *Dacă un cerc are trei (sau mai multe) puncte în comun cu o curbă de lățime constantă b, atunci lungimea razei cercului este cel mult b.*

Triunghiul lui Reuleaux arată că un asemenea cerc poate avea raza egală cu *b*. Dacă unul, arbitrar, din cele trei arce este prelungit pînă la un cerc complet, atunci acest cerc are raza *b* și o infinitate de puncte comune cu curba.

Pentru a demonstra teorema VI, presupunem că cercul k are punctele P, Q, R comune cu o curbă C de lățime constantă b. Din cele trei unghiuri ale triunghiului PQR există cel puțin unul care să nu fie depășit de celelalte două, fiind mai mare decît celelalte două, egal cu unul și mai mare decît celălalt sau egal cu ambele. Vom presupune că acest unghi se află în P și-l vom nota cu α. Prin P ducem acum o dreaptă de sprijin a curbei de lățime constantă. Apoi trasăm un cerc K, de rază b, tangent la dreapta de sprijin din P și care să cuprindă pe C. Punctele Q și R se află în interiorul sau pe circumferința lui K. Dacă atît Q cît și R se află pe circumferință, atunci K și k sînt identice, deoarece există numai un cerc care trece prin trei puncte P, Q, R. În acest caz nu mai avem nimic de demonstrat.

În caz contrar, vom prelungi PQ și PR pînă la intersecțiile lor Q' și R' cu K (fig. 101). Vom dovedi acum că segmentul $Q'R'$ este mai mare decît QR.

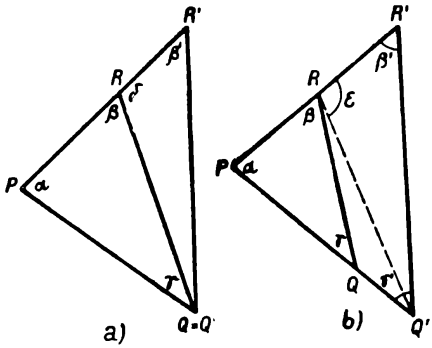


Fig. 102

Dacă Q și Q' coincid, atunci R și R' sînt diferite, deoarece cazul în care ambele puncte Q și R se află pe K a fost studiat. Triunghiurile din fig. 101 sînt situate după cum se arată în fig. 102a. Unghiul $QRR' = \delta$ este exterior triunghiului PQR. Datorită unei teoreme de geometrie elementară, un unghi exterior este mai mare decît fiecare dintre cele două unghiuri interioare neadiacente ale triunghiului. În cazul nostru avem $\delta > \alpha$. De asemenea, deoarece β este unghi exterior al triunghiului QRR', avem $\beta > \beta'$. Întrucît am ales $\alpha \geqslant \beta$ în triunghiul PQR, avem $\delta > \alpha \geqslant \beta > \beta'$ sau $\delta > \beta'$. Prin urmare, QR' este latură a triunghiului QRR' care este opus unghiului δ, iar QR este opus unghiului mai mic β'. Astfel, conform unei teoreme de geometrie binecunoscută, avem $QR' > QR$. Dacă Q diferă de Q' și R diferă de R', triunghiurile se află ca în fig. 102b. Datorită teoremei relative la suma unghiurilor dintr-un triunghi, avem $\beta + \gamma = 180° - \alpha = \beta' + \gamma'$. Este astfel imposibil să avem simultan $\beta' > \beta$ și $\gamma' > \gamma$. Să presupunem că prima dintre aceste inegalități nu este adevărată. Avem atunci $\beta' \leqslant \beta$. În patrulaterul $QQ'R'R$ ducem diagonala $Q'R$, diagonală care nu subdivide unghiul β'. (În cazul $\gamma' \leqslant \gamma$, vom duce QR'). Notînd unghiul $Q'RR'$ cu ε, vedem că există un unghi exterior al triunghiului $PQ'R$, și avem $\varepsilon > \alpha$. Apoi, deoarece avem $\alpha \geqslant \beta$ și $\beta \geqslant \beta'$, găsim în cele din urmă $\varepsilon > \beta'$. Astfel, în triunghiul $Q'R'R$ latura $Q'R'$ este opusă unui unghi mai mare decît unghiul opus lui $Q'R$, deci avem $Q'R' > Q'R$. Deoarece raționamentul nostru inițial poate fi folosit

pentru a arăta că avem și $Q'R > QR$, obținem, în sfîrșit, rezultatul dorit, $Q'R' > QR$.

Am obținut inegalitatea $Q'R' > QR$ pentru orice caz în care cercurile k și K (fig. 101) sînt diferite. Unghiul α înscris în cercul k și subîntins de coarda QR este de asemenea subîntins în cercul K de coarda $Q'R'$. Prin urmare, coardele QR și $Q'R'$ aparțin aceluiași unghi la centru 2α, în cercul k și K respectiv. Dacă ducem aceste unghiuri la centru, obținem fig. 103. De unde se vede că cercului mai mare îi corespunde coarda mai mare și, prin urmare, raza b a lui K este mai mare decît raza lui k. Aceasta încheie demonstrația teoremei VI.

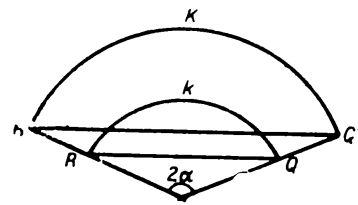


Fig. 103

9. Cea mai simplă curbă de lățime constantă care nu este cerc este triunghiul lui Reuleaux, care are vîrfuri. Teorema care urmează arată că triunghiul lui Reuleaux ocupă un loc special între curbele de lățime constantă, din cauza vîrfurilor sale.

Teorema VII. *Un vîrf oarecare al unei curbe de lățime constantă nu poate avea o deschidere mai mică de 120°. Singura curbă de lățime constantă care are un vîrf de 120° este triunghiul lui Reuleaux, care are trei asemenea vîrfuri.*

Vom măsura unghiul la vîrf cu ajutorul celor două drepte de sprijin extreme ale fasciculului de drepte de sprijin din vîrful considerat. Dacă un vîrf Q are unghiul δ, atunci fasciculul dreptelor de sprijin umple un unghi de $180° - \delta$ (fig. 104). Perpendicularele în Q la toate aceste drepte de sprijin formează un alt fascicul, care umple un unghi de $180° - \vartheta$, unghiul P_1QP_2. Din teorema III rezultă că fiecare dintre aceste perpendiculare intersectează curba într-un punct Q situat la distanța b.

Prin urmare, porțiunea de curbă opusă vîrfului Q este un arc de cerc de rază b și de unghi de $180° - \vartheta$. Conform teoremei II, lungimea coardei P_1P_2 nu poate depăși lățimea b. Astfel, triunghiul isoscel QP_1P_2 are laturile egale de lungime b și baza sa nu poate depăși b. Prin ur-

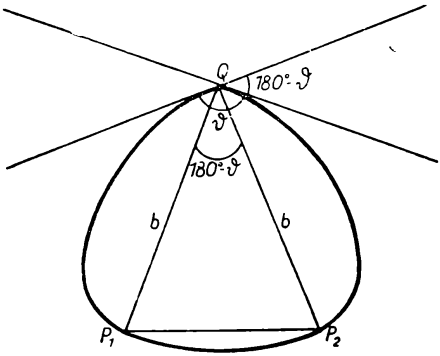


Fig. 104

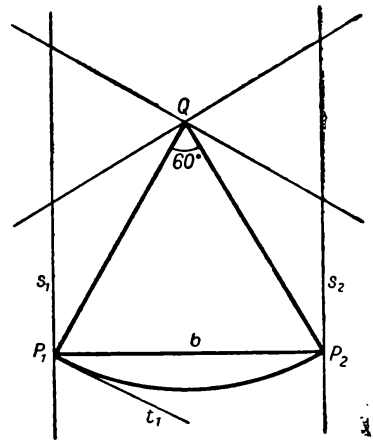


Fig. 105

mare, unghiul P_1QP_2 are cel mult 60°. Am văzut că acest unghi P_1QP_2 este $180° - \vartheta$, astfel încît avem $180° - \vartheta \leqslant 60°$ și, prin urmare, $\vartheta \geqslant 120°$. Deoarece ϑ este un unghi dintr-un vîrf arbitrar, prima parte a teoremei este dovedită.

Dacă unghiul de la vîrf ϑ este de 120°, unghiul P_1QP_2 este de 60° și triunghiul isoscel P_1QP_2 este echilateral (fig. 105). Segmentul P_1P_2 are lungimea b. Deoarece această lungime este egală cu lățimea curbei, cele două drepte de sprijin perpendiculare pe P_1P_2 trebuie să treacă prin P_1 și P_2. Se vede că P_1 și P_2 trebuie să fie, de asemenea, vîrfuri ale curbei. Porțiunea de curbă dintre P_1 și P_2 este un arc de cerc, așa cum am văzut mai înainte. Nu numai că s_1 este dreaptă de sprijin în P_1, dar tot dreaptă de sprijin este și tangenta t_1 la arcul de cerc P_1. Unghiul interior dintre aceste două drepte este de 120°, după cum se vede ușor. Rezultă că s_1 și t_1 trebuie să fie drepte de sprijin extreme ale fasciculului din P_1, deoarece nici un vîrf nu poate avea un unghi mai mic de 120°. Vîrful din P_1 (și similar cel din P_2) are exact 120°. Apoi P_1 și P_2 au exact aceleași proprietăți ca și Q. Fiecăruia i se opune un arc de cerc de rază b și de unghi 60°. Dar acesta este tocmai triunghiul lui Reuleaux și, prin urmare, a doua parte a teoremei VII este dovedită.

10. În acest capitol am obținut mai întîi cîteva curbe particulare de lățime constantă, arătînd cum se constru-

iesc, apoi am demonstrat proprietățile generale date în teoremele I—VII. Aceste proprietăți sînt adevărate pentru o curbă convexă de lățime constantă, dar ele nu ne spun nimic despre existența curbelor de lățime constantă. Vom da acum o construcție cu totul generală a unei curbe de lățime constantă. Aceasta ne va da o imgine completă a tuturor curbelor posibile de lățime constantă. Proprietatea curbelor din teorema V este deosebit de importantă. Curbele de lățime constantă sînt caracterizate prin această proprietate în sensul că se poate alege în mod arbitrar o jumătate dintr-o astfel de curbă dintre două puncte opuse, atîta timp cît satisface condițiile teoremei V. Riguros vorbind avem:

Teorema VIII. *Dacă un arc convex* [1] Γ *are o coardă de lungime* b, *dacă întregul arc se află între două perpendiculare la coardă în capetele sale și dacă el are proprietatea de a fi cuprins în orice cerc de rază* b *tangent la o dreaptă de sprijin în punctul său de contact, situat de aceeași parte a dreptei ca și arcul, atunci curba poate fi prelungită pînă la o curbă de lățime constantă* b.

11. În demonstrația acestei teoreme este convenabil să folosim ideea de *regiuni* de lățime constantă. Deoarece orice regiune de lățime constantă este mărginită de o *curbă* de lățime constantă, trebuie numai să dovedim existența unei regiuni convenabile.

Înainte de a începe demonstrația, vom face o observație despre regiunile care se intersectează. Dacă se dă un număr de regiuni, atunci partea comună tuturor acestor regiuni se numește intersecția lor. De exemplu, intersecția a două cercuri este partea haşurată din fig. 106.

Intersecția unui număr arbitrar de regiuni convexe este ea însăși convexă.

Pentru a dovedi acest lucru trebuie să arătăm că oricare două puncte ale intersecției pot fi unite cu un segment situat în întregime în intersecție. Dar acest lucru este evident. Deoarece dacă două puncte P și Q se află în intersecție, atunci ele se află în oricare dintre regiunile care se

[1] Un arc care împreună cu coarda respectivă mărginește o regiune convexă.

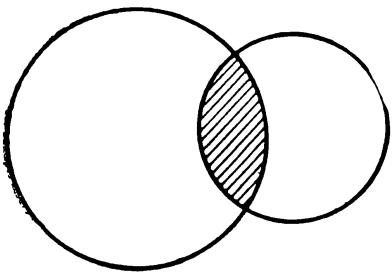


Fig. 106

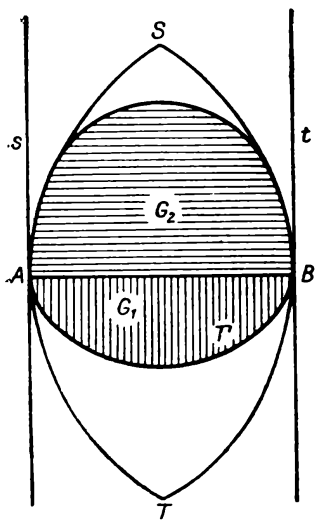


Fig. 107

intersectează. Deci, întrucît fiecare regiune a mulțimii este convexă, segmentul PQ este în toate regiunile. Deoarece el este în toate regiunile, segmentul PQ se află și în intersecție.

În această demonstrație este cu totul lipsit de importanță dacă avem un număr finit sau infinit de regiuni convexe.

12. Presupunem acum că arcul Γ (fig. 107) are proprietățile cerute în teorema VIII: coarda AB are lungimea b. Arcul, împreună cu coarda sa, mărginește regiunea convexă G_1. Perpendicularele la AB în A și B sînt drepte de sprijin pentru G_1. Orice cerc de rază b, care este tangent la o dreaptă de sprijin a lui Γ în punctul de contact, cuprinde pe Γ.

Vom adăuga la G_1 o nouă regiune ABS mărginită de coarda AB, arcul de cerc AS cu centrul B, și arcul de cerc BS cu centrul A. Vom numi această regiune G_2. Cele două regiuni convexe G_1 și G_2 formează împreună o regiune convexă G mărginită de Γ și de arcele AS și BS.

Considerăm acum totalitatea cercurilor de rază b cu centrele pe Γ. Regiunea G și această infinitate de cercuri au o intersecție convexă D (partea hașurată a figurii). Vom demonstra că această regiune D este de lățime constantă și are arcul Γ ca o parte din frontieră.

Dacă Γ aparține lui D, atunci trebuie să facă parte cu siguranță din frontieră, deoarece ea este deja pe frontiera lui G. Dar Γ se află în toate cercurile de rază b care au

centrele pe Γ. Pentru a demonstra aceasta, trebuie să arătăm că nici un punct al lui Γ nu poate fi situat la o distanță mai mare decît b. Or, prin ipoteză, Γ se află în ambele cercuri de rază b cu centrele în A și B și, prin urmare, se află în figura $SATBS$. Deoarece Γ se află pe o latură a lui $A'B$, ea trebuie să se afle în regiunea G'_2, care este simetrică față de AB cu G_2. Distanța dintre două puncte arbitrare ale lui G'_2 este evident cel mult egală cu b, astfel încît acest lucru trebuie să fie adevărat, în particular, pentru oricare două puncte de pe Γ. Prin urmare, Γ aparține lui D și este o parte din frontiera lui D. Deoarece D este convex, el trebuie să conțină orice coardă care unește două puncte ale lui Γ. Pentru acest motiv, G_1 trebuie să fie o parte din D.

Acum să arătăm că două puncte ale lui D nu pot fi situate la o distanță mai mare decît b. Deoarece D este o parte din G, și G este format din regiunile G_1 și G_2, avem trei cazuri de considerat: Dacă două puncte sînt în G_1, atunci, după cum am arătat mai înainte, ele nu pot fi la o distanță mai mare decît b. Dacă cele două puncte sînt în G_2 același lucru este adevărat. În sfîrșit, dacă un punct P_1 este în G_1, iar celălalt punct P_2 este în G_2, atunci putem uni P_1 cu P_2 și prelungi segmentul pînă cînd întîlnește pe Γ, să spunem, în P. Cele trei puncte se vor afla pe această dreaptă în ordinea PP_1P_2. Cercul de rază b și centrul P conține în întregime pe D, astfel încît conțin aceste trei puncte. Urmează că P_1 și P_2 se află pe o rază de lungime b și, prin urmare, distanța dintre ele nu poate depăși b.

Rezultatul pe care l-am obținut arată că regiunea D nu poate avea o lățime mai mare decît b în orice direcție. Trebuie acum să arătăm că ea are lățimea b în orice direcție. În direcția AB, acest lucru este presupus în teoremă. Considerăm o altă direcție arbitrară și ducem cele două drepte de sprijin ale lui D perpendiculare pe această direcție. Una dintre ele, să spunem s_1, va avea un punct de contact Q pe Γ. În Q ducem o perpendiculară de lungime b la s_1 și notăm capătul său cu M. Acum M aparține lui D. Pentru a demonstra acest lucru trebuie să arătăm că M se află în G ca și în orice cerc de rază d cu centrul pe Γ. Ultima afirmație revine la faptul că distanța de la M la oricare din punctele lui Γ este cel mult egală cu b. Acea-

sta rezultă din faptul că cercul de rază b cu centrul M este tangent la s_1 în Q. Prin construcție, acest cerc trebuie să cuprindă arcul Γ, ceea ce arată că distanța de la M la orice punct al lui Γ nu este mai mare decît b. Deoarece, în particular, distanțele AM și BM nu sînt mai mari decît b, punctul M trebuie să se afle în figura $SATBS$. Apoi, deoarece M se află pe latura opusă lui AB din Γ, el se află totodată și în G_2. Rezultă că M se află în G ca și în toate cercurile. Deci M se află în intersecția D.

Deoarece QM este perpendicular pe s_1 și s_2, iar Q și M aparțin lui D, distanța dintre dreptele de sprijin s_1 și s_2 trebuie să fie cel puțin cît $QM = b$. Distanța nu poate fi mai mare decît b, deoarece altfel distanța dintre două puncte de contact ar fi mai mare decît b, și am văzut că acest lucru este imposibil pentru două puncte ale lui D. Prin urmare, distanța între s_1 și s_2 este exact b; regiunea D are lățimea b în orice direcție.

Această teoremă arată că arcul Γ, satisfăcînd anumite condiții, poate fi completat pînă la o curbă C de lățime constantă b. Se vede ușor că există un singur mod în care se poate face această completare, și astfel curba C este unic determinată.

13. În încheiere, menționăm, fără demonstrație, o altă proprietate remarcabilă a acestor curbe: toate curbele de lățime constantă, avînd aceeași lățime b, au același perimetru. Acest perimetru trebuie să fie evident egal cu circumferința unui cerc de diametru b. Acest fapt poate fi ușor verificat pentru exemplele construite în § 4 și § 5, făcînd uz de asemănarea dintre arcele de cerc cu același unghi la centru. Totuși, demonstrația generală necesită idei și metode care depășesc limitele cărții. Demonstrația poate fi începută numai după o analiză deosebit de minuțioasă a conceptului de lungime a unei curbe.

XXVI

Necesitatea compasului în construcțiile de geometrie elementară

1. Construcțiile de geometrie elementară se fac exclusiv numai cu rigla și compasul. De fapt, o proprietate caracteristică a geometriei elementare este faptul că se admit ca instrumente numai compasul și rigla. Aceste instrumente nu sînt însă întotdeauna amîndouă necesare. Există multe construcții în care una sau alta pot fi omise. Mai mult decît atît, după cercetările lui Mascheroni și lucrările recent descoperite ale lui Mohr, rigla poate fi cu totul lăsată la o parte. Toate construcțiile care sînt posibile cu rigla și compasul pot fi făcute numai cu compasul. Deoarece o linie nu poate fi desenată fără riglă, în aceste cercetări o linie se consideră construită de îndată ce s-au găsit două puncte ale sale. Pe de altă parte, Jacob Steiner a arătat că toate construcțiile geometriei elementare pot fi făcute folosind numai rigla, în ipoteza suplimentară că *s-a dat un cerc fix și centrul său.* Nu este greu de arătat că acest cerc fix este indispensabil. Vom demonstra că un cerc fix al cărui centru nu este cunoscut nu este suficient pentru a face toate construcțiile numai cu rigla. Mai mult decît atît, nu ajung nici două cercuri nesecante care au centrele necunoscute. Totuși, se știe că două cercuri care se intersectează și ale căror centre sînt necunoscute sînt de ajuns pentru a înlocui cercul lui Steiner cu centrul dat. De asemenea, sînt suficiente trei cercuri nesecante.

2. Întrucît, conform rezultatului lui Steiner, toate construcțiile de geometrie elementară pot fi făcute de îndată ce avem un cerc dat împreună cu centrul său, ceea ce trebuie să demonstrăm este imposibilitatea construcției centrului unui cerc numai cu ajutorul riglei, cînd se cu-

noaște numai cercul sau două cercuri nesecante. Demonstrațiile de imposibilitate a fiecăreia dintre aceste două construcții vor fi făcute arătînd că ipoteza existenței construcției ne conduce la o absurditate. Aceste demonstrații prin reducere la absurd vor face uz de principiul transformării figurilor.

Dacă demonstrăm că este imposibil de a găsi centrele a două cercuri nesecante numai cu rigla, atunci este clar imposibil de a găsi centrul unui cerc dat. Ultimul caz este însă din punct de vedere geometric mai simplu, astfel încît îl vom dovedi întîi. Totodată, el ne va servi pentru a introduce ideile folosite în ambele demonstrații.

3. Să presupunem că există un anumit mod de a găsi centrul unui cerc desenat pe o hîrtie fără a folosi altceva decît rigla. Construcția noastră va consta în a desena linii care pot intersecta cercul sau se pot intersecta între ele, ca și drepte care unesc intersecțiile deja găsite. Centrul cercului va fi determinat cînd vom găsi două drepte intersectîndu-se în centru. Întreaga figură se va compune atunci din cercul dat și dintr-un anumit număr de drepte, dintre care două se intersectează în centrul cercului.

Vom studia acum o transformare convenabilă a acestei figuri. Această transformare va duce cercul într-un cerc, orice dreaptă într-o dreaptă și intersecția a două drepte în intersecția dreptelor corespunzătoare. Există evident multe transformări de acest fel. De exemplu, orice dilatare și orice contracție a figurii sînt astfel de transformări. Dar, o dilatare nu este utilă scopului nostru. Va trebui să găsim o transformare care duce cercul într-un cerc și orice dreaptă într-o dreaptă, dar care să deformeze figura. În particular, urmărim ca centrul cercului să fie transformat într-un punct diferit de centrul cercului imagine.

Îndată ce vom fi găsit transformarea căutată, demonstrația noastră va fi practic încheiată. Oricum ar diferi imaginea de figura inițială, ele sînt echivalente în ceea ce privește construcția noastră. Orice etapă în demonstrația inițială, trasarea unei linii, găsirea unei intersecții, unirea a două intersecții, poate fi urmărită pas cu pas pe figura transformată. Dar imaginea centrului cercului inițial *nu* este centrul cercului transformat. Prin urmare, imaginile dreptelor care se intersectează în centrul cercului

inițial nu se intersectează în centrul cercului transformat. Deși construcția a fost urmărită pas cu pas pe figura transformată, ea nu ne conduce la centrul cercului transformat. Aceasta contrazice ipoteza după care construcția trebuie să determine centrul cercului și, prin urmare, arată că nu este posibil de a găsi centrul unui cerc dat numai cu ajutorul riglei.

Pentru cazul a două cercuri demonstrația este cu totul asemănătoare.

4. Trebuie să găsim acum o transformare de felul descris. O vom obține cu ajutorul unei proiecții în spațiu. În afara planului E al figurii (fig. 108), fixăm un punct O și ducem un alt plan E', planul imagine sau planul de proiecție. Fiecare rază care trece prin O și un punct P din E va intersecta E' într-un punct P'. Astfel P' este imaginea sau proiecția lui P. În același mod, o întreagă figură din E se proiectează punct cu punct într-o figură a lui E'. Proiecția poate fi gîndită ca umbra aruncată pe E' de figura E, dacă O reprezintă o sursă punctuală de lumină. Prin proiecție orice dreaptă g se proiectează într-o dreaptă g', întrucît totalitatea razelor din O care se sprijină pe g formează un plan, și acest plan intersectează E' după o dreaptă.

Proiecția unui cerc nu va fi, în general, un cerc. Totalitatea razelor care unesc pe O cu circumferința centrului k formează un con. În general, acesta va fi un con oblic. Un con se numește „drept“ dacă dreapta care unește

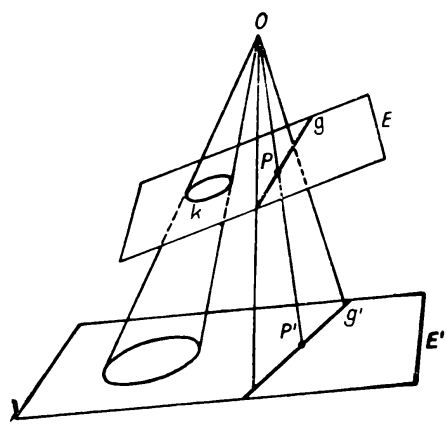


Fig. 108

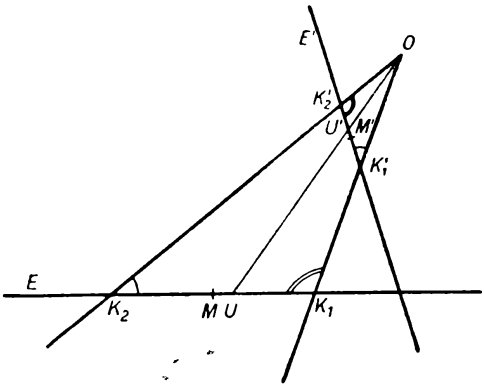


Fig. 109

vîrful său cu centrul bazei sale este perpendiculară pe bază. Un con care nu este drept se numește con oblic. Planul de proiecție E' intersectează conul după o secțiune conică care, după cum se știe, nu este în general un cerc. Totuși, este esențial pentru scopurile noastre ca cercul să se proiecteze într-un cerc. Există două moduri particulare de proiecție care realizează acest lucru.

Primul mod, banal, este acela de a așeza planele E și E' paralel. Atunci, transformarea realizată prin proiecție este o contracție sau dilatare, după cum E sau E' se află mai aproape de O. Această transformare nu este potrivită pentru scopurile noastre, deoarece ea nu deformează figura.

Al doilea mod de a realiza această transformare se bazează pe o teoremă de geometrie în spațiu, astfel încît, pentru a nu întrerupe cursul discuției noastre, vom lăsa această demonstrație la sfîrșitul § 8. Planul perpendicular pe baza conului oblic și care conține vîrful O și centrul bazei conului este un plan de simetrie al conului oblic. Fig. 109 reprezintă intersecția conului cu acest plan. În această figură apare numai diametrul K_1K_2 al bazei. Planul bazei este perpendicular pe planul figurii. Din cauza poziției planului figurii, dreapta OK_1 este cea mai scurtă dintre toate dreptele care unesc O cu circumferința bazei, pe cînd OK_2 este cea mai lungă dintre aceste drepte. Orice plan paralel cu planul de bază E intersectează, evident, conul după un cerc. Dacă planul E' intersectează dreptele OK_1 și OK_2 în K_1' și K_2', astfel încît $\widehat{OK_1'K_2'}=$

$= \widehat{OK_2K_1}$, atunci teorema pe care o vom dovedi în § 8 afirmă că E' intersectează conul după un cerc. Întrucît am luat $\widehat{OK_1'K_2'} = \widehat{OK_2K_1}$, avem de asemenea $\widehat{OK_2'K_1'} = \widehat{OK_1K_2}$, deoarece suma unghiurilor într-un triunghi este 180°. Evident, orice plan paralel cu E' va intersecta, de asemenea, conul după un cerc.

Alegînd pe E' ca mai sus, proiecția lui E pe E' are toate proprietățile cerute. Avem doar de verificat că mijlocul M al lui K_1K_2 nu este transformat în mijlocul M' al lui K'_1K_2'. În primul rînd, bisectoarea unghiului din O este aceeași dreaptă, oricum am gîndi unghiul, ca făcînd parte din triunghiul K_1OK_2 sau din triunghiul $K_1'OK_2'$. Or, în orice triunghi bisectoarea unui unghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile adiacente din triunghi. În conul oblic avem $OK_2 > OK_1$ și, prin urmare, $K_2U > UK_1$ dacă U este intersecția lui E cu bisectoarea unghiului din O. Apoi, avem $\widehat{OK_1K_2} > \widehat{OK_2K_1}$, deoarece laturile opuse unghiurilor mai mari într-un triunghi sînt mai mari. Astfel avem $\widehat{OK_2'K_1'} > \widehat{OK_1'K_2'}$ și, deci, $OK_1' > OK_2'$, de unde obținem $U'K_1' > K_2'U'$. Deoarece M este mijlocul lui K_2K_1 și M' este mijlocul lui $K_2'K_1'$, vedem că U și U' se află în regiuni diferite separate de bisectoarea unghiului din O. Fiind în această poziție, M' nu poate fi imaginea lui M prin proiecția noastră din O.

5. Aceasta încheie demonstrația noastră că centrul unui cerc dat nu poate fi găsit numai cu ajutorul riglei. Folosind fig. 109, putem rezuma principalele puncte ale demonstrației. O figură din planul E, constînd dintr-un cerc de diametru K_1K_2 și mai multe drepte, este proiectată din O pe planul E'. Prin această proiecție dreptele se transformă în drepte și cercul de diametru K_1K_2 se transformă în cercul de diametru $K_1'K_2'$, dar centrul M al lui K_1K_2 nu se transformă în centrul M' al lui $K_1'K_2'$. Orice construcție cu ajutorul dreptelor care determină centrul în E nu va determina centrul în E'. Prin urmare, construcția considerată este imposibilă.

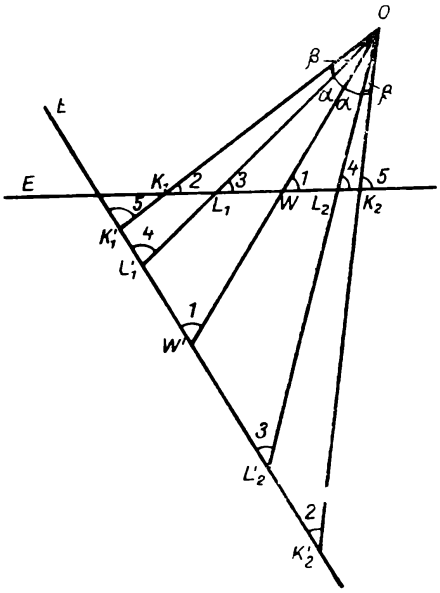


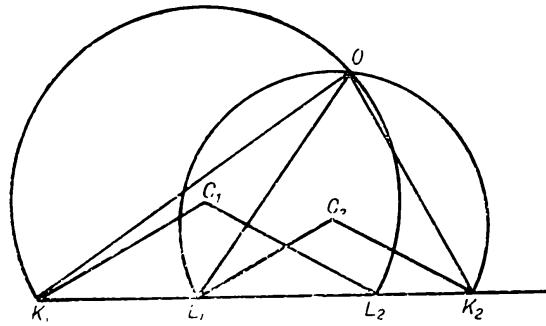
Fig. 110

6. Transformarea este mai dificil de făcut în cazul a două cercuri date. Proiecția din O formează două conuri oblice, și trebuie să o aranjăm astfel încît planul de proiecție E' să le intersecteze pe amîndouă după cercuri.

Distingem două cazuri: Întîi, *cazul în care cercurile sînt unul interior celuilalt.* Desenăm o figură (fig. 110) al cărui plan este perpendicular pe E și trece prin centrele M și N ale ambelor cercuri. Cercurile sînt reprezentate în figură prin diametrele lor K_1K_2 și L_1L_2. Alegînd acum punctul O astfel încît unghiurile K_1OK_2 și L_1OL_2 să aibă aceeași bisectoare, putem duce E' astfel încît $\widehat{L_2WO} = \widehat{L'_1W'O}$, folosind notația din fig. 110. Atunci toate unghiurile din figură desemnate prin aceeași literă sînt egale. Prin urmare, conform teoremei de la § 8, planul E' intersectează ambele conuri după cercurile de diametru $K'_1K'_2$ și $L'_1L'_2$.

Restul demonstrației este analog cu demonstrația precedentă; proiecția transformă cele două cercuri în două cercuri și dreptele în drepte, dar centrele cercurilor nu sînt transformate în centrele proiecțiilor lor. Orice

Fig. 111



construcție de drepte care determină în E centrele celor două cercuri nu va mai determina în E' aceste centre și, prin urmare, nu este posibilă o asemenea construcție.

Trebuie să mai arătăm că punctul O poate fi astfel ales încît unghiurile $\widehat{K_1OK_2}$ și $\widehat{L_1OL_2}$ să aibă aceeași bisectoare. Pentru ca acest lucru să fie adevărat, trebuie să arătăm că $\widehat{K_1OW} = \widehat{K_2OW}$ și $\widehat{L_2OW} = \widehat{L_1OW}$. Adunînd aceste egalități, vedem că trebuie să avem $\widehat{K_1OL_2} = \widehat{K_2OL_1}$. Să alegem o valoare arbitrară pentru aceste unghiuri și să construim triunghiurile isoscele $K_1C_1L_2$ și $L_1C_2K_2$ avînd unghiul din vîrf de $90° - \delta$ (fig. 111). Folosind C_1 ca centru, să ducem un arc de cerc prin K_1 și L_2. Prin L_1 și K_2 să ducem un arc de cerc de centru C_2. Aceste arce se vor intersecta, deoarece coardele K_1L_2 și L_1K_2 se suprapun. Să notăm cu O punctul lor de intersecție. Avem

$$\widehat{K_1OL_2} = \frac{1}{2}\,\widehat{K_1C_1L_2} = \frac{1}{2}\,[180° - 2(90° - \delta)] = \delta,$$

$$\widehat{L_1OK_2} = \frac{1}{2}\,\widehat{L_1C_2K_2} = \frac{1}{2}\,[180° - 2(90° - \delta)] = \delta.$$

Prin urmare, $\widehat{K_1OL_2} = \widehat{L_1OK_2}$, de unde $\widehat{K_1OL_1} = \widehat{K_2OL_2}$. Rezultă că bisectoarea lui $\widehat{L_1OL_2}$ este totodată și bisectoarea unghiului $\widehat{K_1OK_2}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

7. În al doilea caz, *cele două cercuri sînt exterioare unul altuia.* Cele două conuri sînt exterioare unul altuia, și nu este posibil ca unghiurile K_1OK_2 și L_1OL_2 să aibă aceeași bisectoare pentru orice poziție a lui O.

În acest caz, va trebui să folosim cealaltă pînză a conului (fig. 112). Teorema din § 8 se va aplica celor două co-

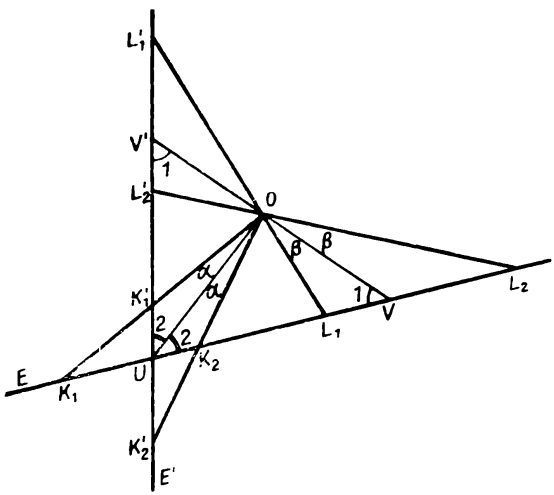


Fig. 112

nuri dacă $\widehat{L_1VO} = \widehat{L_2V'O}$ și $\widehat{K_2UO} = \widehat{K'_1UO}$. Urmează că triunghiul UVV' va fi isoscel, iar UO va fi bisectoarea corespunzătoare vîrfului U. Deci UO este perpendiculară pe VV', și avem

$$\widehat{K_1OL_1} = 90° + \alpha - \beta,$$

$$\widehat{K_2OL_2} = 90° - \alpha + \beta,$$

de unde

$$\widehat{K_1OL_1} + \widehat{K_2OL_2} = 180°. \tag{1}$$

Prin urmare, punctul O poate fi ales astfel încît să satisfacă relația (1). De asemenea, dacă (1) este adevărată,

atunci bisectoarele unghiurilor K_1OK_2 și L_1OL_2 vor fi perpendiculare, deoarece avem

$$2\widehat{UOV} = 2\widehat{UOK_2} + 2\widehat{K_2OL_1} + 2\widehat{L_1OV} =$$

$$= \widehat{K_1OU} + \widehat{UOK_2} + \widehat{K_2OL_1} + \widehat{K_2OL_1} + \widehat{L_1OV} +$$

$$+ \widehat{VOL_2} = \widehat{K_1OL_1} + \widehat{K_2OL_2} = 180°.$$

și, deci

$$\widehat{UOV} = 90°.$$

În acest caz, putem alege pe E', după cum se arată în figură, astfel încît unghiurile 2 să fie egale, și atunci unghiurile 1 vor fi de asemenea egale. Prin urmare, E' intersectează ambele conuri după cercuri; proiecția are proprietățile necesare, și restul demonstrației este asemănător cazurilor precedente.

Pentru a găsi poziția punctului O care satisface condiția (1), vom alege o valoare arbitrară $\widehat{K_1OL_1} = \varphi$ și $\widehat{K_2OL_2} = \Psi$, cu condiția să avem $\varphi + \Psi = 180°$. Folosind metoda de la sfîrșitul § 6, să ducem un arc de cerc de mărime φ subîntins de coarda K_1L_1. În mod asemănător, să ducem un arc de mărime Ψ subîntins de K_2L_2. Deoarece K_1L_1 și K_2L_2 se suprapun, arcele de cerc se vor intersecta. Intersecția lor este punctul O căutat.

Am demonstrat deci că două cercuri nesecante, ale căror centre nu se cunosc nu sînt de ajuns pentru a face posibilă orice construcție numai cu rigla.

8. Rămîne doar de dovedit teorema a cărei demonstrație a fost amînată în § 4. Această teoremă afirmă că dacă *planul* E (fig. 109) *intersectează conul oblic* K_1OK_2 *după un cerc, atunci planul* E' *va intersecta, de asemenea, conul după un cerc, dacă unghiurile* $\widehat{K_1'K_2'O}$ și $\widehat{K_2K_1O}$ *sînt egale.* Trebuie să amintim că planul figurii este planul perpendicular pe baza conului, determinat de vîrful O și de centrul M al bazei. Condiția $\widehat{K_1'K_2'O} = \widehat{K_2K_1O}$

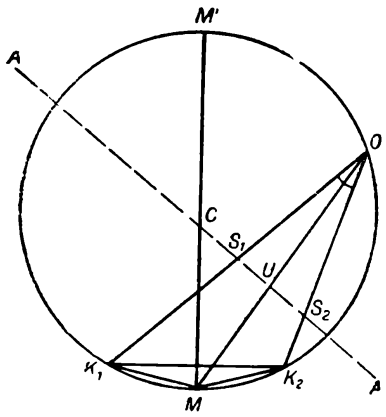


Fig. 113

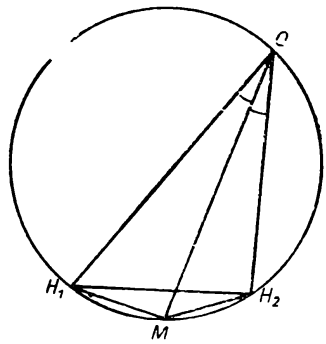


Fig. 114

poate fi, evident, înlocuită prin $\overset{\frown}{K_2'K_1'O} = \overset{\frown}{K_1K_2O}$ sau prin $\overset{\frown}{K_2'U'O} = \overset{\frown}{K_1UO}$.

Planul din fig. 109 este un plan de simetrie al conului. Demonstrația noastră se întemeiază pe găsirea unui alt plan de simetrie.

Fig. 113 arată aceeași secțiune a conului înfățișată și în fig. 109. Am dus cercul circumscris triunghiului OK_1K_2 ca și bisectoarea MO a unghiului O. Deoarece unghiurile K_1OM și K_2OM sînt egale, arcele K_1M și K_2M pe care le interceptează sînt egale. Prin urmare, perpendiculara dusă din centrul C al cercului la coarda K_1K_2 intersectează cercul în punctul M. Dacă rotim cercul în jurul axei $M'CM$, el descrie o sferă. Circumferința bazei K_1K_2 și vîrful O al conului se află pe această sferă; conul este înscris în sferă. Prin urmare, punctul M este egal distanțat de toate punctele cercului de diametru K_1K_2.

Dreapta OM joacă un rol special în studiul conurilor oblice. Ea se numește *axa conului*. Ducînd un plan prin axă, el intersectează conul după un triunghi cu un vîrf în O și celelalte două în punctele H_1 și H_2, de pe baza conului. Acest plan intersectează sfera după cercul circumscris triunghiului OH_1H_2. Punctul M se află de asemenea pe acest cerc, și obținem o figură (fig. 114) cu totul similară cu fig. 113. Deoarece cele două coarde H_1M și H_2M sînt egale, în virtutea relației dintre M și cercul de bază

al conului, axa OM este bisectoarea unghiului H_1OH_2. *Axa unui con oblic are proprietatea că orice plan care trece prin ea intersectează conul după un triunghi în care axa este bisectoarea unui unghi.*

Vom intersecta acum conul cu un plan A perpendicular pe axa conului și pe planul din fig. 113. Intersecția lui A cu planul din figură este indicată prin linia punctată AA din fig. 113. Intersecția lui A cu conul este înfățișată în fig. 115. Planul acestei figuri este planul A, și axa conu-

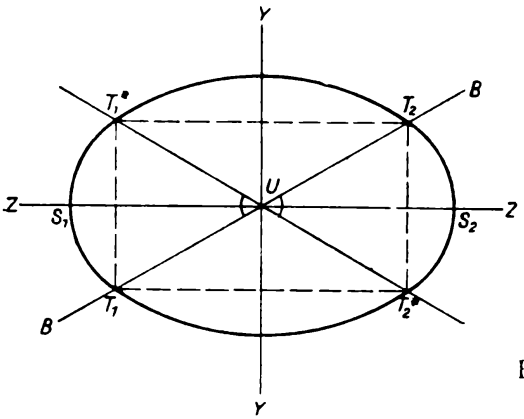


Fig. 115

lui este perpendiculară pe el. Planul din fig. 113 intersectează planul din fig. 115 după linia ZZ. Considerăm un plan arbitrar care trece prin axă. El intersectează planul din fig. 115 după o anumită linie, să spunem BB. Punctele T_1, T_2 reprezintă intersecția sa cu curba. Vîrful O nu este în planul din fig. 115, dar se află perpendicular deasupra punctului U. În triunghiul T_1OT_2, axa UO este perpendiculară pe T_1T_2 și, conform rezultatului nostru, ea este bisectoarea unghiului T_1OT_2. Prin urmare, avem $T_1U = T_2U$. Deoarece B a fost un plan arbitrar care trece prin axă, rezultă că punctul U este un centru de simetrie al intersecției conului cu planul A.

Planul din fig. 113 este un plan de simetrie al conului, și intersecția sa cu planul din fig. 115 este ZZ. Prin urmare, fig. 115 este simetrică atît față de dreapta ZZ, cît și față de punctul U. Cu alte cuvinte, imaginile prin simetrie T_1^* și T_2^* de pe con corespund punctelor T_1 și T_2 de pe con.

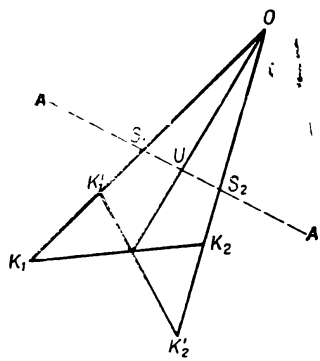


Fig. 116

Cele patru puncte formează un patrulater $T_1T_2^*T_2T_1^*$. Deoarece T_1U și T_2U sînt egale, avem $T_1^*U = T_2^*U$ prin simetrie. Apoi, $\widehat{T_1UT_1^*} = \widehat{T_2UT_2^*}$, deoarece sînt opuse la vîrf. Deci triunghiurile $T_1^*T_1U$ și $T_2^*T_2U$ sînt egale, astfel încît avem $T_1T_1^* = T_2T_2^*$. Dreptele $T_1T_1^*$ și $T_2T_2^*$ sînt, de asemenea, paralele, deoarece sînt amîndouă perpendiculare pe ZZ. Prin urmare, $T_1T_2^*T_2T_1^*$ este un paralelogram. Întrucît cele două diagonale T_1T_2 și $T_1^*T_2^*$ sînt egale, paralelogramul este un dreptunghi și U este centrul său. Aceasta arată că fig. 115 are, de asemenea, o axă de simetrie YY.

Rezultatul nostru arată că planul care trece prin axă, perpendicular pe planurile din fig. 113 și fig. 115, este un al doilea plan de simetrie al conului. Este suficient să observăm doar că acest plan conține dreapta YY din fig. 115, care trece prin U și este perpendiculară pe planul din fig. 113.

Dacă facem simetricul conului față de-al doilea plan de simetrie, simetricul său coincide cu el însuși; acesta este un alt mod de a exprima simetria. Totuși, imaginea cercului de diametru K_1K_2 este un alt cerc $K_1'K_2'$ care se află, de asemenea, pe con (fig. 116). Acesta este cercul căutat. Unghiul dintre planul acestui cerc și axa conului este în conformitate cu enunțul teoremei. În sfîrșit, remarcăm că cercul de diametru K_1K_2 nu poate să coincidă cu imaginea sa, deoarece acest lucru s-ar putea întîmpla numai dacă planul său ar fi perpendicular pe axa conului. Dar acest lucru contrazice ipoteza oblicității conului.

XXVII

O proprietate a numărului 30

Nici 10, nici 21 nu sînt numere prime. Dar $10 = 2 \cdot 5$ și $21 = 3 \cdot 7$ nu au divizor comun. Pentru acest motiv ele se numesc „numere relativ prime". Numerele 6 și 10 nu sînt relativ prime; ele au divizorul comun 2.

Dintre toate numerele de la 1 la 9, numerele 3, 7, 9 sînt relativ prime cu 10. Deși 9 este relativ prim cu 10, el nu este un număr prim. În cazul lui 12 situația este diferită. Dintre toate numerele de la 1 la 11, numai 5, 7, 11 sînt relativ prime cu 12, și ele sînt toate numere prime. Se poate arăta ușor că această proprietate a lui 12 o au și numerele

3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Se pune întrebarea: *este numărul 30 cel mai mare număr care are proprietatea că toate numerele mai mici decît el și relativ prime cu el sînt numere prime?* Capitolul de față este consacrat demonstrației acestui fapt.

Începem prin a vedea cum putem găsi numerele cu această proprietate. Începînd de la 4, orice astfel de număr N trebuie să fie divizibil cu 2, pentru că dacă ar fi impar, 4 ar fi relativ prim cu el, iar 4 nu este număr prim. În mod analog, orice număr N de acest fel, mai mare decît 9, trebuie să fie divizibil cu 3. Deoarece el este deja divizibil cu 2, el trebuie să fie divizibil cu $2 \cdot 3$. Continuînd acest raționament, obținem tabelul:

De	la	4	încolo,	N	trebuie	să	fie	divizibil	cu	$2 =$	2
„	„	9	„	N	„	„	„	„	„	$2 \cdot 3 =$	6
„	„	25	„	N	„	„	„	„	„	$2 \cdot 3 \cdot 5 =$	30
„	„	49	„	N	„	„	„	„	„	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$	210
„	„	121	„	N	„	„	„	„	„	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$	
											$= 2310.$

Între 4 și 9, singurele valori posibile pentru N sînt 4, 6, 8; între 9 și 25, numai 12, 18, 24; între 25 și 49, numai 30 (60, următorul multiplu de 30, este mai mare decît 49). Între 49 și 121 nu există nici o posibilitate, întrucît 210 este mai mare decît 121. Se vede că dacă vom continua tabelul în acest mod, adică dacă 13^2 este mai mic decît $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, 17^2 este mai mic decît $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ș.a.m.d., și atunci 30 este cel mai mare număr care are proprietatea cerută. Dacă reprezentăm numerele prime succesive

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots,$$

prin simbolurile

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, \cdots,$$

așa cum am făcut în capitolul I va trebui să dovedim că inegalitatea

$$p_{n+1}^2 < p_1 p_2 p_3 \cdots p_n, \tag{1}$$

este adevărată pentru toate numerele n începînd de la 4.

Demonstrația lui Euclid, reprodusă în capitolul I, arată că avem

$$p_{n+1} < p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Ceea ce trebuie dovedit este că

$$p_{n+1} < \sqrt{p_1 p_2 p_3 \cdots p_n},$$

și acest lucru afirmă mai mult decît rezultatul lui Euclid. Inegalitatea (1) este probabil mai interesantă în sine decît problema relativă la numărul 30 pe care ne-am propus-o. Deoarece problema propusă este rezolvată de îndată ce vom dovedi relația (1), ne vom concentra atenția asupra demonstrației lui (1).

Inegalitatea (1) afirmă mult mai puțin decît este adevărat. Nu numai că numărul prim următor lui $p_5 = 11$ este mai mic decît $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \sqrt{2\,310} = 48{,}06\ldots$, ci el este chiar 13. Diferența devine cu atît mai mare cu

cît continuăm. Totuși, din cauza distribuției cu totul neregulate a numerelor prime, este deosebit de greu să obținem rezultate generale despre toate numerele prime. Cu ajutorul unor metode superioare, Cebîșev a demonstrat că primul număr prim după p_n este mai mic decît $2p_n$, adică, $p_{n+1} < 2p_n$. Acest lucru este mult mai mult decît ne trebuie nouă, astfel încît se pune problema dacă (1) nu poate fi dovedit cu ajutorul metodelor elementare.

H. Bonse, pe cînd era student, a găsit o demonstrație ingenioasă a inegalității (1). Ea nu numai că evită metodele infinitezimale folosite de Cebîșev, dar face uz numai de cele mai simple idei matematice.

1. Ideea de bază a demonstrației este asemănătoare cu aceea a demonstrației lui Euclid, dată în capitolul I. În loc de a forma expresia

$$N = p_1p_2 \dots p_n + 1 \text{ sau } M = p_1p_2 \dots p_n - 1$$

cu ajutorul primelor n numere prime vom folosi numai primele i numere prime $p_1, \dots, p_i$ și vom forma numerele

$$\begin{aligned}
M_1 &= p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot 1 - 1,\\
M_2 &= p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot 2 - 1,\\
M_3 &= p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot 3 - 1,\\
M_4 &= p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot 4 - 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
M_{pi} &= p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot p_i - 1.
\end{aligned}$$

Ca și în cazul demonstrației lui Euclid, putem afirma:

a. *Nici unul dintre numerele* $M_1, \dots, M_{p_i}$ *nu este divizibil cu nici unul dintre numerele* $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$.

b. *Cel mult unul dintre aceste numere este divizibil cu* p_i. Deoarece dacă două dintre ele, să spunem $p_1 \dots p_{i-1} x - 1$ și $p_1 \dots p_{i-1} y - 1$, ar fi divizibile cu p_i, atunci diferența lor $p_1 \dots p_{i-1}(x - y)$ ar fi, de asemenea, divizibilă cu p_i. Întrucît p_i nu divide nici unul dintre primii $i - 1$ factori, el ar trebui să dividă pe $(x - y)$. Dar x și y sînt dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5,..., p_i, astfel încît diferența lor este cel mult egală cu $p_i - 1$, care este mai mic decît p_i. Prin urmare, p_i nu poate divide această diferență, deoarece un număr mai mare nu poate divide un număr mai mic. Această demonstrație arată că:

c. *Cel mult unul dintre numerele de mai sus este divizibil cu p_{i+1}, cel mult unul este divizibil cu p_{i+2}, ..., cel mult unul este divizibil cu p_n.*

Dacă acum numerele p_i, $p_{i+1},\ldots,p_n$ sînt în număr mai mic decît expresiile $M_1,\ldots,M_{p_i}$, cu alte cuvinte, dacă avem

$$n - i + 1 < p_i, \tag{2}$$

atunci cel puțin unul dintre numerele M nu este divizibil cu nici unul dintre numerele p_i, $p_{i+1},\ldots,p_n$. Acest important pas al demonstrației rezultă direct din b și c. Dacă notăm acest număr cu M_h, atunci M_h nu este divizibil cu nici unul dintre numerele $p_1,\ldots,p_n$, deoarece a arată că el nu este divizibil cu $p_1,\ldots, p_{i-1}$.

Pasul următor rezultă direct din demonstrația lui Euclid. M_h este sau prim sau se descompune în factori primi. Există un număr prim p care este sau egal cu M_h sau divide pe M_h. Deoarece M_h nu este divizibil cu $p_1, \ldots,p_n$, numărul p trebuie să fie mai mare decît p_n. Numărul prim care urmează imediat după p_n este p_{n+1}, astfel încît avem $p_{n+1} \leqslant p$. De asemenea, deoarece p divide pe M_h sau este egal cu el, avem $p \leqslant M_h$. Cel mai mare dintre toate numerele M este M_{p_i}, astfel încît putem strînge aceste inegalități la un loc pentru a obține

$$p_{n+1} \leqslant M_{p_i} = p_1 \cdots p_{i-1} p_i - 1 < p_1 \cdots p_i.$$

Putem rezuma rezultatul nostru astfel: *Dacă avem (2), atunci avem*

$$p_{n+1} < p_1 \cdots p_i. \tag{3}$$

2. Rezultatul din § 1 este o îmbunătățire a rezultatului lui Euclid.

$$p_{n+1} < p_1 \cdots p_n.$$

Numărul i este mai mic decît n, astfel încît partea dreaptă a fost micșorată. Cît de mult am cîștigat astfel? Condiția (2) nu ne permite să luăm o valoare oricît de mică pentru i. Trebuie să luăm pe i suficient de mare, astfel încît $n - i + 1$ să fie mai mic decît p_i. Această condiție este complicată datorită modului în care intervine i. Un exemplu simplu ne va ajuta să înțelegem mai bine situația.

Să luăm $n = 5$, astfel încît avem de considerat primele cinci numere prime 2, 3, 5, 7, 11. Dacă alegem $p_i = 3$, atunci $i = 2$ și grupul numerelor $p_i, ..., p_n$ constă din 3, 5, 7, 11. Acest grup este format din $n - i + 1 = 5 - 2 + 1 = 4$ numere. Numărul acestora nu este mai mic decît primul dintre ele (4 nu este mai mic decît $p_i = 3$), astfel încît am ales o valoare prea mică pentru i. Dacă mărim acum pe i cu *1*, pentru $i = 3$, avem $p_i = 5$, și există numai trei numere 5, 7, 11. Deoarece 3 este mai mic decît 5, această alegere este convenabilă. Evident, orice alegere mai mare a lui i va satisface, de asemenea, condiția (2).

Rezultatul pe care îl vom dovedi în această secțiune este că *dacă i este ales suficient de mic, cu condiția (2), atunci avem*

$$p_1 \cdots p_i < p_{i+1} \cdots p_n. \tag{4}$$

Acest lucru este adevărat pentru $n = 5$, după cum se poate verifica prin înmulțiri: $2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11$. Pentru a arăta că acest lucru este în general valabil, trebuie să vedem cum se schimbă cea mai bună valoare a lui i cînd n crește.

Pentru $n = 5$ avem $i = 3$, $p_i = 5$. Grupul numerelor $p_i, ..., p_n$ conține trei numere, 5, 7, 11. Dacă trecem de la $n = 5$ la $n = 6$, adăugăm un alt număr prim 13. Totuși, nu este nevoie să schimbăm pe i, deoarece grupul numerelor $p_i, ..., p_n$ poate să conțină patru numere. Dacă trecem la $n = 7$, adăugăm numărul prim 17. Trebuie acum să mărim pe i, deoarece altfel grupul $p_i, ..., p_n$ conține cinci numere, și 5 **nu este** mai mic decît $p_i = 5$. **Prin** urmare, trebuie să luăm $i = 4$, dacă $n = 7$. Dar, $i = 4$ implică $p_i = 7$, și aceasta **admite** un grup de șase **numere** **7, 11,** 13, 17. 19. 23. **Adică,** $i = 4$ este **suficient pentru** $n = 7$, 8, 9. Pentru $n = 10$, **valoarea** lui i trebuie mărită la $i = 5$. În acest caz, p_i **va** fi 11. Deoarece aceasta reprezintă un salt de 4 **peste** valoarea $p_i = 7$, această valoare a lui i va fi suficientă pentru 5 valori ale lui n,

pentru $n = 10, 11, 12, 13, 14$. Valoarea lui p_i este dată în tabelul de mai jos cu ajutorul cifrelor aldine:

$n = 5$: 2, 3, **5**, 7, 11

$n = 6$: 2, 3, **5**, 7, 11, 13

$n = 7$: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17

$n = 8$: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19

$n = 9$: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19, 23

$n = 10$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29

$n = 11$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$n = 12$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

$n = 13$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41

$n = 14$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43

$n = 15$: 2, 3, 5, 7, 11, **13**, 17, 19, 23, 29, **31**, 37, 41, 43, 47

. . . . . .

De fiecare dată cînd i crește cu o unitate, numărul prim p_i crește cu cel puțin 2, și aceasta face ca i să rămînă neschimbat pentru următoarele trei valori ale lui n. Dacă p_i crește cu mai mult de două unități, valoarea lui i rămîne constantă pentru mai multe valori ale lui n.

După ce am văzut cum se modifică valoarea optimă a lui i, cînd n crește, putem studia inegalitatea (4). Știm că (4) este adevărată pentru $n = 5$.

(5) $$2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11.$$

Pentru $n = 6$, i nu se schimbă și, conform relației (4), rezultă că

(6) $$2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

ceea ce este evident adevărat, deoarece partea dreaptă din (5) a fost mărită.

Trecerea de la $n = 6$ la $n = 7$ nu este chiar simplă, deoarece i își schimbă valoarea. Numărul 7 se deplasează de la dreapta la stînga, și în dreapta apare un alt număr prim, 17. Trebuie dovedit că

(7) $$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 < 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Fără a face calculul, nu putem obține (7) direct din (6).

Am putea înmulți partea stîngă din (6) cu factorul 7 și partea dreaptă cu factorul mai mare 17, dar acest lucru ar conduce la

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 < 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17,$$

în care, în dreapta, apare factorul nedorit 7.

Dacă pornim de la relația (5), putem totuși deduce (7) fără calcule. Înmulțind partea stîngă din (5) cu $7 \cdot 7$, iar partea dreaptă cu $13 \cdot 17$, găsim

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 < 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Simplificînd 7 în ambele părți, obținem inegalitatea (7).

Acest raționament ne duce de la $n = 6$ la $n = 7$, fără a face calcule. El se sprijină pe faptul că putem merge înapoi cu *doi* pași, la $n = 5$. Exact același raționament poate fi invocat la fiecare pas asemănător, de la o valoare a lui n la alta. El se bazează numai pe faptul că de fiecare dată cînd i crește, el rămîne același pentru cel puțin *două* valori consecutive ale lui n (am văzut că el rămîne neschimbat pentru cel puțin *trei* și adesea pentru mai multe valori ale lui n). Prin urmare, inegalitatea (4) este adevărată pentru $n = 5, 6, \ldots$.

3. Înmulțind ambele părți din (4) cu $p_1 \ldots p_i$, obținem

$$(p_1 \ldots p_i)^2 < p_1 \ldots p_n$$

sau

$$p_1 \ldots p_i < \sqrt{p_1 \ldots p_n}. \tag{8}$$

Această inegalitate, împreună cu (3), ne dă relația (1) căutată pentru $n = 5, 6, \ldots$. Faptul că (1) este adevărată pentru $n = 4$ se verifică ușor prin calcul.

4. Bonse duce discuția ceva mai departe. Inegalitatea

$$p_{n+1} < \sqrt[3]{p_1 \ldots p_n}, \tag{9}$$

poate fi dovedită pentru $n \geqslant 5$, prin metode asemănătoare. Punctul hotărîtor în demonstrație este faptul că valorile lui i, discutate la sfîrșitul § 2, rămîn neschimbate pentru trei valori ale lui n, și nu numai pentru două, ca în demonstrația precedentă.

XXVIII

O inegalitate îmbunătățită

În capitolul XXVII am menționat că demonstrația dată de Bonse pentru (8) conduce la inegalitatea mai bună (9). De fapt, cu ajutorul unei idei suplimentare simple vom putea dovedi ceva mai mult într-un sens deși, după cum vom vedea, vom pierde ceva în alt sens.

Noua idee este următoarea: Dacă M este un număr de forma $6m - 1$ (un multiplu de 6 micșorat cu 1), atunci în descompunerea în factori primi a lui M trebuie să apară cel puțin un factor prim de aceeași formă, $6x - 1$. Pentru a dovedi acest lucru, observăm că orice număr este de una dintre formele: $6x$, $6x - 1$, $6x - 2$, $6x - 3$, $6x - 4$, sau $6x - 5$. Dar, $6x$, $6x - 2$ și $6x - 4$ sînt numere pare, astfel încît 2 este singurul număr prim de această formă. De asemenea, $6x - 3$ este divizibil cu 3, astfel încît 3 este singurul număr prim de această formă. Ne mai rămîn numai numerele de forma $6x - 1$ și $6x - 5$, astfel încît orice număr prim este de una dintre aceste forme sau este egal cu 2 sau 3. Totuși, 2 și 3 nu pot divide pe M, care este de forma $6m - 1$, apoi, produsul a două numere de forma $6y - 5$ și $6z - 5$ este:

$$(6y - 5)(6z - 5) = 36yz - 30y - 30z + 25 = \\ = 6(6yz - 5y - 5z + 5) - 5$$

care este de aceeași formă, astfel încît pentru ca M să aibă forma $6m - 1$, descompunerea sa trebuie să conțină cel puțin un factor prim de forma $6x - 1$. Pentru a obține noua inegalitate, care îmbunătățește inegalitatea din capitolul XXVII, nu vom folosi *toate* numerele prime $p_1, p_2,$

p_3, p_4,... = 2, 3, 5, 7,... așa cum am făcut mai înainte și, în schimb, vom lua numai q_1, q_2, q_3, q_4, ... = 2, 3, 5, 11,... . Vom lua $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ și, pentru restul de numere q, numerele prime de forma $6x - 1$.

Să formăm acum expresiile M_1, M_2, ..., M_{q_i} ca și mai înainte, dar folosind numerele q în locul numerelor p:

$$M_1 = q_1 q_2 \dots q_{i-1} \cdot 1 - 1,$$

$$M_2 = q_1 q_2 \dots q_{i-1} \cdot 2 - 1,$$

$$M_3 = q_1 q_2 \dots q_{i-1} \cdot 3 - 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$M_{q_i} = q_1 q_2 \dots q_{i-1} \cdot q_i - 1.$$

Afirmațiile a, b, c, pe care le-am făcut referitor la expresiile de mai sus, rămîn încă adevărate dacă înlocuim numerele p cu numerele q.

Ultimul pas necesită o mică explicație. Dacă

$$(2^*) \qquad n - i + 1 < q_i,$$

atunci există un M, să zicem M_h, nedivizibil cu nici unul dintre numerele q_1,..., q_n. Dacă M_h este prim, rezultă că el este egal cu un număr prim de forma $6x - 1$, care apare după numerele q_1, ..., q_n. Dacă M_h nu este prim, conform observației noastre precedente, există cel puțin un număr prin de forma $6x - 1$ care îi divide. Deoarece acest număr prim nu poate fi unul dintre numerele q_1, ..., q_n, el va apărea după q_n. În orice caz, deducem că există un număr q de forma $6x - 1$, care divide pe M_h și care apare după q_n. Întrucît q_{n+1} este primul număr prim de forma $6x - 1$ care urmează după q_n, avem $q_{n+1} \leqslant q$, și deoarece q divide pe M_h avem: $q \leqslant M_h < q_1 \dots q_i$. Combinînd aceste rezultate, avem inegalitatea

$$(3^*) \qquad q_{n+1} < q_1 \dots q_i$$

adevărată de îndată ce (2*) este adevărată.

Să luăm acum cea mai mică valoare posibilă pentru i, care satisface condiția (2*), și să formăm un tabel, în care să trecem valoarea lui q_i pentru fiecare n, așa cum am

făcut în §2. Deoarece tabelul devine mult mai mare, vom scrie numai o parte din el.

$n = 6$: 2, 3, **5**, 11, 17, 23
$n = 7$: 2, 3, 5, **11**, 17, 23, 29
$n = 8$: 2, 3, 5, **11**, 17, 23, 29,...
$n = 9$: **2, 3, 5, 11**, 17, 23, 29,...
$n = 10$: 2, **3, 5, 11**, 17, 23, 29,...
$n = 11$: 2, 3, 5, **11**, 17, 23, 29,...
$n = 12$: 2, 3, 5, **11**, 17, 23, **29**,...
$n = 13$: 2, 3, 5, **11**, 17, 23, **29**,...
$n = 14$: 2, 3, 5, 11, **17**, 23, 29,...
. . . . . .
$n = 20$: 2, 3, 5, 11, **17**, 23, 29,...
$n = 21$: 2, 3, 5, 11, 17, **23**, 29,...
. . . . . .
$n = 114$: 2, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, **101**, 107, 113,...
$n = 115$: 2, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 101, **107**, 113,...
. . . . . .
$n = 121$: 2, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 101, **107**, 113,...
$n = 122$: 2, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 101, 107, **113**,...
. . . . . .

De observat în acest tabel că atunci cînd q_i crește, el crește cu cel puțin 6. Aceasta permite lui i să rămînă neschimbat pentru cel puțin șapte valori succesive ale lui n. Datorită pauzei mari pe care o face i, putem dovedi că

$$(4^*) \qquad (q_1 \cdots q_i)^6 < q_{i+1} \cdots q_n.$$

Într-adevăr, dacă această inegalitate este adevărată pentru toate valorile din tabel pînă la o anumită valoare n, și dacă i nu se schimbă pentru valoarea următoare $n + 1$, atunci (4*) este adevărată și pentru $n + 1$, deoarece s-a mărit numai partea dreaptă. Dacă i se schimbă totuși, putem să ne întoarcem cu șapte pași pînă la n—6, fără a modifica pe i și avem

$$(q_1 \cdots q_i)^6 < q_{i+1} \cdots q_{n-6}.$$

Dacă înmulțim partea stîngă cu q_i^7 și partea dreaptă cu

$$q_{n-5}\, q_{n-4}\, q_{n-3}\, q_{n-2}\, q_{n-1}\, q_n\, q_{n+1},$$

care este mai mare, obținem

$$(q_1 \cdots q_i)^6\, q_{i+1}^7 < q_{i+1} \cdots q_{n+1}.$$

Împărțind ambele părți cu q_{i+1}, obținem inegalitatea pentru $n+1$:

$$(q_1 \cdots q_{i+1})^6 < q_{i+2} \cdots q_{n+1}.$$

Nu am demonstrat încă în întregime inegalitatea (4*). Am văzut numai că ea este adevărată pentru $n+1$, în ipoteza că este adevărată pentru n și i nu se schimbă, sau că este adevărată pentru $n-6$ și i se schimbă. Vom vedea că ea este adevărată pentru $n = 114$ și 115. Deoarece $n = 115$ este primul din cei șapte pași (cel puțin) în care i rămîne neschimbat, (4*) va fi astfel dovedită pentru toate numerele $n \geqslant 114$. Este ușor de văzut că (4*) este adevărată pentru $n = 114$ și 115. Pentru $n = 115$ partea stîngă este puterea a șasea a unui produs de $i = 16$ factori; adică, partea stîngă este produsul a $6 \cdot 16 = 96$ factori. Partea dreaptă este produsul a $n - i = 115 - 16 = 99$ factori și fiecare factor din dreapta este mai mare decît fiecare din stînga. Demonstrația pentru $n = 114$ este asemănătoare. Această demonstrație este grosolană, deoarece nu face uz de faptul că numerele din stînga sînt mult mai mici decît acelea din dreapta. Făcînd un calcul mai atent am putea, probabil, reduce întrucîtva mărimea lui n, dar calculele ar fi prea lungi. Un fapt este cu totul evident: (4*) *nu* este adevărat pentru $n = 6$.

Dacă înmulțim acum ambele părți din (4*) cu $q_1 \ldots q_i$ și extragem rădăcina de ordinul șapte, obținem

$$(8^*) \qquad q_1 \cdots q_i < \sqrt[7]{q_1 \cdots q_n}$$

pentru $n \geqslant 114$. Combinată cu (3*), (8*) ne dă

$$(9^*) \qquad q_{n+1} \leqslant \sqrt[7]{q_1 \cdots q_n}, \qquad n \geqslant 114.$$

Aceasta se aseamănă cu inegalitățile lui Bonse (1) și (9) din capitolul XXVII, dar este dovedită pentru numerele prime particulare $q_1, q_2, \ldots$

Pentru a obține o inegalitate ca (9*) pentru mulțimea *tuturor* numerelor prime $p_1, p_2, \ldots$, observăm mai întîi că demonstrația noastră pentru (9*) dovedește că șirul de numere prime particulare q nu este finit. Prin urmare, dacă p_r este un număr prim arbitrar, putem găsi un q_n, astfel încît $q_n \leqslant p_r < q_{n+1}$. Întrucît p_{r+1} este primul dintre

numerele prime mai mari decît p_r avem $p_{r+1} \leqslant q_{n+1}$. De asemenea, $q_1 \dots q_n \leqslant p_1 \dots p_r$, deoarece partea dreaptă cuprinde toate numerele prime $q_1, \dots q_n$, ca și alte numere prime care nu sînt de această formă. Ținînd seama de aceste fapte în (9*), obținem

$$p_{r+1} < \sqrt[7]{p_1 \dots p_r}. \tag{9**}$$

Am demonstrat acest lucru numai pentru $p_r \geqslant q_n$, $n \geqslant 114$, adică pentru $p_r \geqslant q_{114}$. Aceasta este îmbunătățirea inegalității lui Bonse pe care o căutam. Putem spune că (9**) este adevărată pentru r suficient de mare. Cu ajutorul unei liste de numere prime am putea găsi numărul q_{114} și am putea preciza astfel cît de mare trebuie să fie r. Relația (9**) este probabil adevărată și pentru valori mult mai mici ale lui r, deduse prin calcul. Interesul principal al relației (9**) constă însă în faptul că ea este adevărată de îndată ce r depășește o anumită valoare. (Valoarea exactă a lui r este de mică importanță).

Demonstrînd (9**) am îmbunătățit inegalitatea lui Bonse înlocuind rădăcina pătrată sau cubică cu rădăcina de ordinul șapte, care este cu mult mai mică. Totuși, am pierdut ceva în acest proces. Inegalitatea lui Bonse este adevărată pentru toate valorile lui n, $n \geqslant 4$ și $n \geqslant 5$, pe cînd (9**) este adevărată numai pentru valori suficient de mari ale lui r.

Cititorul ar trebui să rețină faptul că această discuție nu cere alte cunoștințe matematice în afară de noțiunile simple folosite în capitolul I. Demonstrația se sprijină numai pe un raționament elementar. Aceasta arată cît de ingenioasă și cît de dificilă poate fi matematica. În anumite cazuri se poate ajunge la scopul propus combinînd și extinzînd numeroasele sale ramuri, dar adevăratul ei spirit se poate deduce și din exemple ca cel de mai sus, în care demonstrația se face cu ajutorul unui număr extrem de redus de cunoștințe matematice. Dacă acest ultim capitol pare să necesite un șir lung de raționamente, dacă el arată cum se poate construi un bogat edificiu matematic pe o bază extrem de redusă, atunci el realizează în modul cel mai clar scopul real al acestei cărți.

Note și observații

Capitolul I

Cu cuvintele lui Euclid (*Elemente* IX, 20), „Există mai multe numere prime decît orice mulțime de numere prime date".

Pentru demonstrația referitoare la lacunele din șirul numerelor prime a se vedea K r o n e c k e r, *Vorlesungen über Zahlentheorie* I, Leipzig, 1901, p. 68.

Existența unei infinități de numere prime în anumite șiruri, de exemplu 1, 5, 9, 13, ..., $4n + 1$,... sau 3, 7, 11, 15,..., $4n - 1$,..., ambele cu rația 4, poate fi dovedită cu metode elementare. Totuși, șirul 2, 6, 10,..., $4n + 2$,..., cu aceeași rație 4, conține numai un singur număr prim 2, întrucît toți termenii săi sînt pari. În general, teorema este adevărată pentru orice progresie aritmetică infinită, cu condiția ca primul termen să fie relativ prim cu rația. Acest lucru a fost dovedit de Dirichlet cu ajutorul matematicii superioare într-o lucrare celebră („Abh. d. preuss. Ak. d. Wiss", 1837, pp. 45—81 sau *Werke* I, pp. 307—342).

Capitolul II

Reprezentarea unei rețele ca rețea de șosele auto poate lăsa impresia că nodurile curbei trebuie să se afle într-un plan. Acest lucru nu este necesar. Toate rezultatele acestei secțiuni sînt adevărate pentru rețele de curbe din spațiu. Acest lucru este în opoziție cu subiectul din capitolul X, cu care are o anumită asemănare superficială, dar care nu poate fi tratat în spațiu fără modificări.

Capitolul III

2. Discuția poate fi transpusă direct de la cerc la elipsă. Rolul triunghiului echilateral este jucat în acest caz de triunghiul pentru care tangentele din fiecare vîrf sînt paralele cu latura opusă.

3. Pasul preliminar se datorește lui E. Steinitz.

Capitolul IV

Anaxagoras — vezi Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, I, nr. 46, ed. a 2-a, vol. 3, p. 314_{16-19}.

Platon, *Legile*, VII, $819d_5 - 820c_9$.

Prima demonstrație nu se găsește printre lucrările matematicienilor greci, dar este de același tip și este posibil ca ei să o fi cunoscut. A doua demonstrație este dată de Euclid în *Elemente*, cartea a X-a, dar se găsește o indicație în Aristotel, *Analytica priora*, p. $41a_{26}$, p. $50a_{37}$, care pare să arate că ea datează dinainte de Euclid.

Capitolele V și VI

Schwarz, H. A. în „Ges. Abh." II, pp. 344—345; a se vedea, de asemenea, Steiner, J., *Werke* II, pp. 728—729; de asemenea nr. 7, p. 95 (= Crelle, 16, 1837, p. 88), unde afirmația este dată atît pentru triunghiuri plane, cît și sferice, și pp. 238, 3

Demonstrația lui Fejér nu este publicată nicăieri. Ea a fost reprodusă cu permisiunea autorului.

Este, evident, necesar ca triunghiul să fie ascuțit-unghi, deoarece numai în acest caz toate înălțimile sînt interioare triunghiului. Într-un triunghi cu un unghi obtuz, triunghiul format de picioarele înălțimilor nu va fi un triunghi înscris propriu-zis. Într-un triunghi dreptunghic, triunghiul format de picioarele înălțimilor este degenerat într-un segment.

În demonstrația lui Schwarz, faptul că triunghiul este ascuțit-unghi se folosește cînd se presupune că triunghiul format de picioarele înălțimilor este înscris în triunghiul inițial. Acest lucru este folosit în transformarea figurii prin simetrie. În demonstrația lui Fejér, triunghiul format de picioarele înălțimilor nu apare decît la sfîrșit. Faptul că triunghiul este ascuțit-unghi se folosește la a lua unghiul $U'AU''$ mai mic decît două unghiuri drepte, astfel încît intersecțiile M și N ale lui $U'U''$ cu AC și AB să se afle pe aceste laturi și nu în prelungirile lor. Apoi, deoarece triunghiul este ascuțit-unghi, piciorul E al perpendicularei se află pe latura BC și nu în prelungirea sa.

Un avantaj al demonstrației lui Fejér este că ea rămîne adevărată în geometria neeuclidiană. Acest lucru nu este adevărat pentru demonstrația lui Schwarz, deoarece ea folosește faptul că suma

unghiurilor dintr-un triunghi este de 180°, ca și ideea de drepte paralele. În particular, deoarece laturile unui triunghi sferic, ascuțitunghi, sînt mai mici decît 90°, demonstrația lui Fejér rămîne adevărată, punct cu punct, pentru cazul triunghiurilor sferice.

Capitolul VIII

Viggo Brun a folosit o funcție combinatorie mult mai generală. A se vedea N e t t o, *Lehrbuch der Combinatorik*, cap. 14, ediția a 2-a, Leipzig, 1927, ed. V. Brun și Th. Skolen. Brun a discutat, de asemenea, funcția particulară din acest capitol în *L'Enseignement Mathématique*, vol. 29, 1930, pp. 231—237.

Capitolul IX

Bachet, în *Aritmetica lui Diofant*, a dovedit că o parte din *Aritmetica* cuprinde implicit teorema reprezentării numerelor ca o sumă de patru pătrate. Fermat a schițat o demonstrație într-o scrisoare, iar Euler și Lagrange (*Opere*, vol. 3, 1869, pp. 189—201), au demonstrat teorema în modul indicat în text.

W a r i n g, *Meditationes Algebraicae*, ed. a 3-a, Cambridge, 1782, p. 349, a conjecturat că sînt suficiente nouă cuburi, 19 puteri de gradul 4 etc. A se vedea, de asemenea, C. G. J. J a c o b i, *Werke*, vol. 6, p. 322; W i e f e r i c h, în „Math. Ann.", vol. 66, 1909, pp. 95—101, 106—108; H i l b e r t, în „Math. Ann.", vol. 67, 1909, pp. 281—300, H a r d y și L i t t l e w o o d, în „Math. Zeitschr.", vol. 23, 1925, pp. 1—37.

J. Liouville și-a prezentat demonstrația la Collège de France; ea este tipărită de Lebesgue în *Exercices d'analyse numérique*, 1859, pp. 113—115.

„Etc." din conjectura lui Waring trebuie interpretat în sensul că orice număr natural n poate fi reprezentat ca o sumă de

$$I = 2^k + q - 2$$

puteri de gradul k, unde q este cel mai mare întreg care nu depășește pe $(3/2)^k$. Este nevoie exact de atîtea puteri pentru numărul $n = 2^k q - 1$ pentru care, deoarece este mai mic decît 3^k, nu se folosesc decît termenii 1^k și 2^k. Dickson și Pillai au demonstrat

în 1936 și în anii următori că pentru $k \geqslant 6$ numărul I de puteri de gradul k este suficient pentru n, dacă

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k - q < 1 - \frac{q}{2^k},$$

(cu îmbunătățirea adusă de Niven). Această condiție are loc pentru $2 \leqslant k \leqslant 400$. Nu se știe dacă ea este adevărată pentru toate numerele k. Totuși, pentru acele numere k pentru care ar putea să nu fie adevărată, numărul necesar $g(k)$ de puteri de gradul k a fost de asemenea determinat. Pentru $k = 4{,}5$ știm în prezent doar că

$$19 \leqslant g(4) \leqslant 35, \qquad 37 \leqslant g(5) \leqq 54.$$

Lucrarea lui Dickson și Pillai se bazează pe un rezultat obținut de Vinogradov cu metodele sale de teoria funcțiilor deduse din metodele lui Hardy și Littlewood.

Capitolul X

1. G a u s s, *Werke*, vol. 8, pp. 272, 282—286; a se vedea, de asemenea, J u l i u s v. S z. N a g y, în „Math. Zeitschr.", vol. 26, pp. 579—592, în special pp. 580—581, unde teorema este formulată și demonstrată într-un mod diferit.

4. Nu este chiar evident că o curbă închisă fără puncte duble izolează planul în două regiuni. Teorema nu este adevărată pentru alte suprafețe. Ea nu este, de exemplu, adevărată pe tor. Din această cauză, teorema trebuie afirmată pentru *plan* și necesită o demonstrație. Prima demonstrație a fost dată de C. Jordan, și teorema îi poartă acum numele. Deoarece teorema lui Jordan nu are loc pe tor (fig. 117), raționamentul nostru nu este adevărat pe

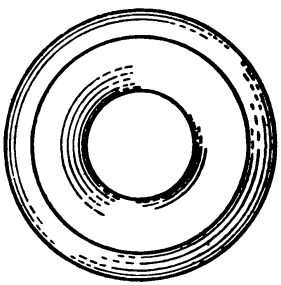


Fig. 117

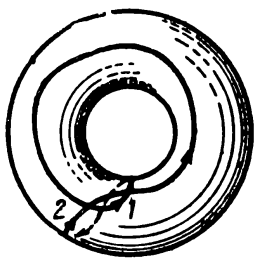


Fig. 118

această suprafață. Într-adevăr, se poate trasa o curbă fără puncte duble pe tor, în ordinea 1212 (fig. 118).

5. Relativ la nodurile alternante, a se vedea T a i t, în „Trans. Edinburgh Philos. Soc.", vol. 28, 1879, p. 145.

Nodul din fig. 34 poate fi deformat fără ruperi în nodul din fig. 33, care este alternant. Totuși, nu este adevărat că orice nod poate fi deformat într-un nod alternant. C. B a n k w i t z, în „Math. Ann.", vol. 103, 1930, p. 161, a dat un exemplu de nod a cărui proiecție nu este niciodată alternantă.

Subiecte asemănătoare celor din § 2 și § 10 sînt discutate de J. P e t e r s e n, în „Acta. Math.", vol. 15, 1891, pp. 193—220.

Capitolul XI

Teorema de unicitate a descompunerii în factori primi nu este explicit menționată de Euclid. Totuși, el dovedește că dacă un produs este divizibil cu un număr prim, atunci cel puțin un factor trebuie să fie divizibil cu acel număr prim (*Elemente*, VII, 24, 29), o teoremă din care unicitatea descompunerii în factori primi rezultă imediat. Pentru demonstrația sa Euclid folosește cel mai mare divizor comun în locul celui mai mic multiplu comun.

O demonstrație simplă, folosind inducția matematică, a fost găsită în secolul al XX-lea, în mod independent unul de altul, de Zermelo, Hasse, și Lord Cherwell și merită să fie menționată aici.

Primele cîteva numere naturale admit cu siguranță o descompunere unică în factori primi. Într-adevăr, lăsînd 1 de o parte, numerele 2 și 3 sînt prime ele însele. Să presupunem că ar exista numere cu două descompuneri diferite în factori primi. Atunci, ar trebui să existe între aceste numere *cel mai mic* număr. Să spunem că el este,

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_l$$

unde p și q sînt numere prime, care sînt presupuse în fiecare produs, ordonate după mărime.

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k \text{ și } q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_l.$$

Toate numerele p trebuie să fie diferite de numerele q; dacă $p_i = q_i$, atunci am putea simplifica acest factor și am obține N/p_i, care este mai mic decît N și ar admite două descompuneri diferite. Fără

a restrînge generalitatea, putem presupune $p_1 < q_1$. Să formăm atunci

$$M = p_1 \cdot q_2 \dots q_l < q_1 \cdot q_2 \dots q_l = N.$$

Numărul M ca și numărul N sînt divizibili cu p_1. Prin urmare, diferența $N^* = N - M$ este, de asemenea, divizibilă cu p_1 și admite astfel o descompunere în factori primi, care cuprinde pe p_1. Pe de altă parte avem

$$N^* = (q_1 - p_1)q_2 \dots q_l,$$

în care $q_1 - p_1$ nu este divizibil cu p_1, ca și nici unul dintre numerele $q_2, \dots, q_l$. Aceasta înseamnă că N^* admite o altă descompunere în factori primi, în care p_1 nu apare și are astfel două descompuneri diferite. Această contradicție infirmă existența numerelor cu două descompuneri diferite.

Capitolul XIII

10. Proprietățile figurilor geometrice, care rămîn neschimbate prin deformări (fără rupturi), constituie obiectul unei ramuri a matematicii, *topologia* sau *analysis situs*. Considerațiile noastre despre poliedrele regulate sînt de natură pur topologică.

Ideea de a rotunji poliedrele, transformîndu-le în sfere, reprezintă o metodă topologică particulară. Am obține rezultate cu totul diferite dacă am studia poliedrele care sînt topologic echivalente cu torul, și aceasta va evidenția sensul topologic al paragrafelor 7 și 10. Există o infinitate de hărți „regulate" (în sens topologic) pe suprafața unui tor, dar nici una nu poate fi realizată ca poliedru regulat în sensul geometriei metrice.

Pe tor, formula lui Euler (cap. XII, § 5) este

$$v - e + f = 0. \tag{3*}$$

Relațiile (4) și (5) rămîn evident adevărate și în cazul de față, astfel încît în loc de (6) obținem

$$f(2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon) = 0, \tag{6*}$$

și, deci, întrucît $f \neq 0$,

$$2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon = 0, \tag{7*}$$

sau

$$(\varphi - 2)(\varepsilon - 2) = 4. \tag{9*}$$

În locul inegalității (9) avem acum o *egalitate*. Descompunerea lui 4 în doi factori este posibilă în următoarele feluri: $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$ și $4 \cdot 1$. Pentru φ și ε, acestea ne conduc la tabelul

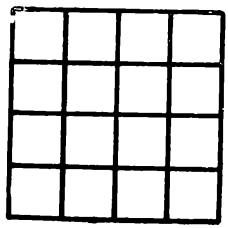


Fig. 119

φ	3	4	6
ε	6	4	3

Aceste valori satisfac egalitatea (9*) și prin urmare și (7*). Dar, atunci (6*) este satisfăcută de *orice* număr f, deoarece $f \cdot 0 = 0$ pentru orice f. Prin urmare, în acest caz, f, v și e nu pot fi determinate cu ajutorul valorilor φ și ε.

Într-adevăr, există o infinitate de valori ale lui f, v și e pentru fiecare pereche φ, ε.

Pentru perechea $\varphi = 4$, $\varepsilon = 4$ putem lua un număr arbitrar $a > 1$ și să aranjăm a^2 pătrate în forma unui pătrat (fig. 119). Acest pătrat poate fi rulat, transformîndu-l într-un cilindru (fig. 120), și cilindrul poate fi îndoit, transformîndu-l într-un tor (fig. 121). Atunci torul este acoperit de o hartă regulată, în care fiecare țară are patru frontiere, și $\varepsilon = 4$ țări se întîlnesc în fiecare vîrf. Avem

Fig. 120

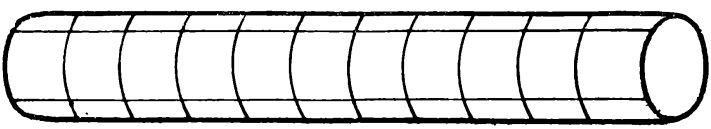
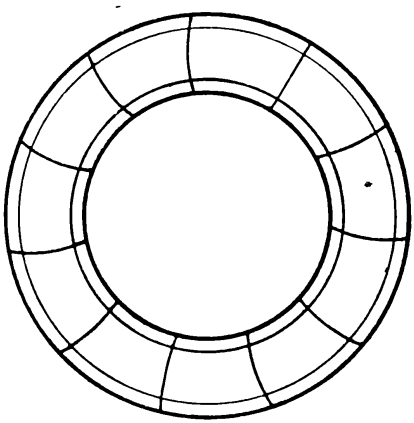


Fig. 121



a ici $f = a^2$, și este ușor de văzut că avem, de asemenea, $v = a^2$, $e = 2a^2$. Deoarece a este un număr arbitrar, mai mare decît 1, avem o infinitate de hărți topologic regulate pe tor. (Este mai complicat de a construi hărți pentru $\varphi = 6$, $\varepsilon = 3$. Cazul $f = 7$, $v = 14$, $e = 21$ apare printre aceste hărți. Acestui caz îi corespunde harta menționată în cap. XII § 5, în legătură cu problema culorilor pe tor.)

Nici unul dintre aceste poliedre nu poate fi realizat ca poliedru regulat în sensul geometriei metrice. Dacă $\varphi = 4$, $\varepsilon = 4$, atunci fețele trebuie să fie pătrate. Patru pătrate cu un vîrf comun se află într-un plan și nu pot forma un vîrf tridimensional. Oricum am îmbina pătratele, ele vor continua să fie situate într-un plan și nu vor forma un corp solid. Același lucru este adevărat pentru $\varphi = 6$, $\varepsilon = 3$, deoarece trei hexagoane regulate în jurul unui punct se află în același plan. Afirmația rămîne valabilă pentru $\varphi = 3$ $\varepsilon = 6$; șase triunghiuri echilaterale în jurul unui punct se află tot deauna într-un plan.

În încheiere, observăm *întîi* că existența a exact cinci poligoane topologic regulate pe o suprafață sferică este o proprietate a sferei. Există o infinitate de poliedre topologic regulate pe suprafața torului. În al *doilea* rînd, regularitatea topologică nu implică regularitatea metrică. Poliedrele regulate de tipul torului nu pot fi realizate ca poliedre regulate în sensul metric. Faptul că poliedrele regulate în sens metric de pe sferă pot fi realizate se datorește proprietăților metrice particulare ale sferei.

Capitolul XIV

7. Lăsînd la o parte cazul $n = 4$ (tratat în § 8), este suficient să dovedim imposibilitatea relației $x^n + y^n = z^n$ în numere întregi numai pentru numărul prim $n = p$. În literatură se disting două cazuri: cazul I, în care $x \cdot y \cdot z$ nu este divizibil cu p, cazul II, în care unul (și numai unul) dintre numerele x, y, z este divizibil cu p. În cazul I, conjectura lui Fermat a fost dovedită pentru toate numerele prime $p < 253, 747, 889$, (de D. H. Lehmer, Emma Lehmer și Rosser). În cazul II, au fost folosite teoreme mai profunde de teoria numerelor, și conjectura lui Fermat a fost verificată pentru toate numerele $p \leqslant 4\ 001$, cu ajutorul unei mașini de calcul electronice de la Los Angeles, SWAC, de D. H. Lehmer, Emma Lehmer și Vandiver.

Capitolul XVI

H. W. E. Jung, în „Journal f. d. reine u. angew. Mathem.", vol. 123, 1901, pp. 241—257, tratează problema analogă în cazul n-dimensional. El găseşte

$$r = d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

ca rază a sferei care acoperă o mulţime finită de puncte de diametru d din spaţiul cu n dimensiuni. Cazul $n = 2$ este problema din text.

Capitolul XVIII

A se vedea Gabriel Koenigs, *Leçons de Cinématique*, Paris, 1897, pp. 273—285.

Capitolul XIX

7. Numerele prime de forma $2^p - 1$, unde p este un număr prim, se numesc numerele lui Mersenne (după numele lui Père Marin Mersenne corespondent al lui Fermat şi Descartes). Dintre numerele lui Mersenne se cunosc în prezent cele corespunzătoare lui

$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1\,279, 2\,203, 2\,281,$

dintre care ultimele cinci au fost găsite în 1952—1953 cu ajutorul maşinii de calcul SWAC din Los Angeles. Orice număr prim a-lui Mersenne generează un număr perfect.

Capitolul XXII

J. Steiner, *Werke*, vol. II, pp. 193—195. Completarea demonstraţiei indicată la sfîrşitul capitolului a fost dată de C. Carathéodory şi E. Study, în „Math. Ann.", vol. 68, pp. 133—140. Pentru o demonstraţie diferită, completă, a se vedea Edler, *Göttinger Nachrichten*, 1882, p. 73.

O remarcă din comentariul lui Simplikios asupra lucrării lui Aristotel, *De Coelo*, în „Berl. Ak. Ausg.", VII, p. 412_{13}, stabileşte că Arhimede şi Zenodorus au dovedit teorema atît pentru figurile plane, cît şi pentru cele solide. Se afirmă, de asemenea, că teorema se cunoştea chiar înainte de Aristotel.

Capitolul XXIII

Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, art. 312–318, studiază fracțiile zecimale periodice, dar folosește multe rezultate de teoria numerelor.

4. Numărul $\varphi(n)$ depinde de n. Funcția φ se numește funcția lui Euler și poate fi definită ca fiind numărul fracțiilor ordinare, ireductibile, proprii de numitor n.

8. Dacă $p,q,r,\ldots$ sînt numerele prime *diferite* care divid pe n, atunci $\varphi(n)$ este dat de formula

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{r-1}{r} \cdots .$$

Demonstrația acestei formule poate fi găsită în orice carte de teoria numerelor, de exemplu, Hardy și Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1938, p. 64, teorema 63.

Capitolul XXV

7. Proprietatea unei curbe de lățime constantă, afirmată de teorema IV, are loc, de asemenea, pentru orice curbă convexă și poate fi dovedită direct. Totuși, demonstrația folosește procesele de trecere la limită și este mai ușor de făcut sub formă analitică.

Partea din teoria curbelor de lățime constantă, care poate fi tratată cu metode elementare, este dată complet în acest capitol. Există o literatură bogată privind probleme mult mai complicate ale acestei teorii. Cititorului căruia îi este familiar calculul diferențial și integral îi poate fi de folos W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916.

Capitolul XXVI

1. Lorenzo Mascheroni (1750—1800) afirmă, în introducerea cărții sale, *La geometria del compasso*, 1797, Pavia, că a studiat singur probleme de construcție cu rigla și compasul pornind de la probleme de ordin practic. Construcțiile făcute cu compasul sînt mult mai riguroase decît acelea făcute cu rigla (acest fapt îi era cunoscut lui Mascheroni) și ele sînt folosite de astronomi cînd vor să obțină scale precise în instrumentele lor. Studiul amănunțit al construcțiilor cu compasul l-a condus pe Mascheroni la descoperirea

faptului că toate construcțiile geometriei elementare pot fi făcute numai cu compasul. El și-a dedicat cartea lui Napoleon, în calitate de eliberator al Italiei de nord. În schimb, Napoleon a atras atenția savanților francezi asupra cărții într-o discuție (10 decembrie 1797) cu membrii Academiei Franceze. În traducerea franceză *(Géométrie du compas*, ed. a 2-a, Paris, 1828) această discuție este descrisă în modul următor:

„Lagrange și Laplace luau parte la o reuniune, și într-o conversație pe care a avut-o Bonaparte cu acești geometri iluștri, și în mod special cu Laplace, el le prezentă *Geometria compasului*, operă pe atunci cu totul nouă și necunoscută în Franța, dîndu-le și soluția cîtorva probleme din această lucrare originală. După ce l-a ascultat cu atenție pe Bonaparte, Laplace, care fusese profesorul său la școala din Brienne, îi spuse în prezența tuturor savanților reuniți în jurul lor: „Generale, noi așteptăm totul de la dv., exceptînd lecțiile de matematică".

Singura lucrare cunoscută a matematicianului danez Georg Mohr (1640—1697) este lucrarea *Euclides Danicus*, Amsterdam, 1672, și aceasta a fost descoperită recent (tipărită din nou în limba germană la Copenhaga, 1928). Prima parte a acestei cărți este consacrată problemei construcțiilor geometrice.

Jacob Steiner (1796—1863), de origine elvețiană, a fost profesor la Universitatea din Berlin. Problema menționată în acest capitol este extrasă din cartea sa *Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung*, Berlin, 1833).

Problema dacă centrul unui cerc poate fi găsit numai cu rigla, și metoda de rezolvare se datoresc lui David Hilbert. Ea a fost publicată prima oară de unul din studenții săi, Detlef Cauer („Math. Ann.", vol. 73, 1912, pp. 90—94 și vol. 74, 1913, pp. 462—464.

6 și 7. Am considerat numai cazul a două cercuri nesecante. Ar fi imposibil de găsit o proiecție de tipul utilizat pentru două cercuri secante. Într-adevăr, o asemenea proiecție ar dovedi că centrele a două cercuri nu pot fi găsite cu ajutorul riglei, și, după cum s-a menționat în § 1, o astfel de construcție poate fi găsită în acest caz.

Construcția este într-adevăr foarte simplă. În primul rînd, fig. 122 arată cum poate fi găsit diametrul unui cerc dacă se dau două coarde paralele AA' și CC'. Datorită simetriei, dreapta DD' trece prin centrul cercului. Dacă se cunoaște o a doua pereche

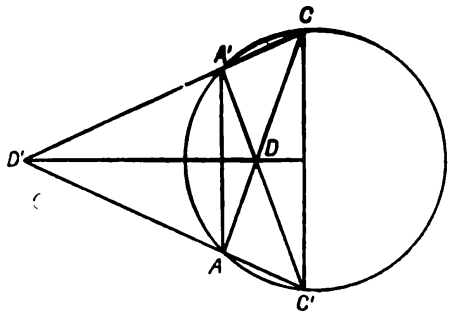


Fig. 122

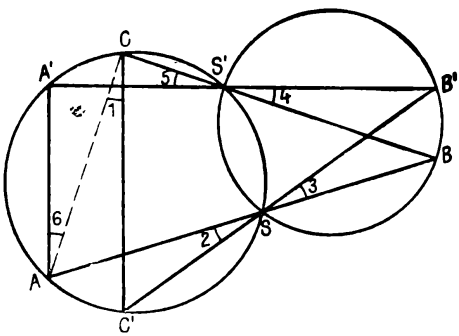


Fig. 123

de coarde paralele, atunci se poate duce un al doilea diametru şi centrul este determinat prin intersecţia celor doi diametri. Putem găsi acum o metodă de a construi două coarde paralele. Aceasta este arătată în fig. 123. Dreapta AA' este o coardă arbitrară a unuia dintre cele două cercuri. Pornind din A ducem o dreaptă ASB şi dreapta $BS'C$, determinînd astfel pe C. În mod asemănător, pornind din A', ducem $A'S'B'$ şi apoi $B'SC'$. Punctele C şi C' determină o altă coardă. Pentru a dovedi că AA' şi CC' sînt paralele, este suficient să arătăm doar că unghiurile alterne interne 1 şi 6 sînt egale. Trecînd prin unghiurile 1, 2, ...,6, vedem că fiecare este egal cu următorul, fie datorită faptului că interceptează acelaşi arc de cerc, fie că sînt opuse la vîrf.

O construcţie pentru determinarea centrelor a trei cercuri nesecante este întrucîtva mai complicată. Nu o vom reproduce aici, deoarece ar necesita cunoştinţe mai adînci de geometrie. O asemenea construcţie poate fi găsită în lucrarea lui Cauer, menţionată mai sus.

8. Se pot da şi alte demonstraţii mai scurte ale teoremei, dar ele nu au aspectul pur geometric al demonstraţiei date. Am ales

în mod special această demonstrație, deoarece ea conține o parte esențială din teoremă, simetria conului oblic.

Capitolul XXVII

B o n s e, în „Archiv. d. Math. u. Phys.“, (3), vol. 12, 1907, pp. 292—295; cf. de asemenea R. R e m a k, în „Archiv. d. Math. u. Phys.(3)“, vol. 15, 1908, pp. 186—193.

De fapt, se știe mai mult decît faptul că $p_{n+1} < 2p_n$. Totuși, cel mai bun rezultat nu este suficient de bun pentru a stabili dacă există totdeauna un număr prim între două pătrate consecutive, de exemplu, între 100 și 121, între 121 și 144 ș.a.m.d.

Cuprinsul

Prefață la ediția engleză 5
Introducere 7
I.
Șirul numerelor prime 11
II.
Parcurgînd rețele de curbe 17
III.
Cîteva probleme de maxim 22
IV.
Segmente incomensurabile și numere iraționale 28
V.
O proprietate de minim 34
VI.
O a doua demonstrație a aceleiași proprietăți de minim 39
VII.
Teoria mulțimilor 45
VIII.
Cîteva probleme combinatorii 56
IX.
Asupra problemei lui Waring 67
X.
Curbe închise care se autointersectează 79
XI.
Este unică descompunerea unui număr în factori primi 85
XII.
Problema celor patru culori 95
XIII.
Poliedre regulate 107

XIV.
Numere pitagoreice şi teorema lui Fermat 114
XV.
Teorema mediei aritmetice şi a mediei geometrice 123
XVI.
Cercul subîntins de o mulţime finită de puncte 134
XVII.
Aproximarea numerelor iraţionale cu ajutorul numerelor raţionale 143
XVIII.
Mişcări rectilinii produse de mecanisme 153
XIX.
Numere perfecte 165
XX.
Demonstraţia lui Euler a existenţei unui număr infinit de numere prime 173
XXI.
Principii de bază ale problemelor de maxim 178
XXII.
Figura de arie maximă şi perimetru dat 183
XXIII.
Fracţii zecimale periodice 189
XXIV.
O proprietate caracteristică cercului 206
XXV.
Curbe de lăţime constantă 210
XXVI.
Necesitatea compasului în construcţiile de geometrie elementară 227
XXVII.
O proprietate a numărului 30 239
XXVIII.
O inegalitate îmbunătăţită 246
Note şi observaţii 251

Redactor resp. de carte: MARIA BORICEAN
Tehnoredactor: MARIA POPESCU

Dat la cules 22.08.1967. Bun de tipar 24.02.1968. Tiraj 9 500 + 140 ex. Hirtie scris II A, 63 g/m². Format 80×100/32. Coli editoriale 12,35. Coli tipar 8,375. A. 21182. Indici de clasificare zecimală: pentru biblioteci mari 51, pentru biblioteci mici 51

Tiparul executat sub comanda nr. 726 la
Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918"
Str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97, București
Republica Socialistă România

Lei 6 25

editura ştiinţifică

Poate fi extins farmecul matematicii dincolo de cercul îngust al acelora „înzestraţi din punct de vedere matematic"? Este adevărat că puţini oameni au talent matematic, în sensul de a fi capabili să descopere noi fapte matematice. La fel, numai puţini oameni sînt talentaţi din punct de vedere muzical în sensul de a putea să compună muzică. Însă mulţi oameni pot înţelege şi reproduce muzica, sau se pot bucura cel puţin de ea. Credem că numărul acelora ce pot înţelege ideile matematice simple nu este mai mic decît numărul acelora care gustă muzica. Scopul lucrării de faţă este tocmai acela de a arăta că aversiunea faţă de matematică dispare de îndată ce sînt înfăţişate ideile matematice esenţiale.